

ストリップ・インテグラル法による跳水計算

九州工業大学工学部 学生員 Le Dinh Hong, Tengku Noor Hisham

○青柳 泰治

正 員 秋山 壽一郎

1. 諸言

跳水現象に関する研究はマクロ的な諸特性量の決定を目的として、従来より多くの研究が実験的・理論的に行なわれてきた。近年では、エアレーション問題や沈殿池の効率などとの関連として、乱流構造も含めた流れの内部構造も実験的に明らかにされるに致っている。本研究はS・I法(ストリップ・インテグラル法)と断面平均k-εモデルを組み合わせ、自由跳水の特性量を数値的に決定しようとするものである。

2. 理論

跳水は図-1に示されるように、逆圧力勾配の有限水深の二次元乱流壁面噴流と考えてよく、二次元乱流壁面噴流の支配方程式である連続方程式と乱流境界層方程式は、それぞれ式(1)と(2)で与えられる。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \dots (1)$$

$$\frac{u \partial u}{\partial x} + \frac{v \partial u}{\partial y} = -g \frac{dh}{dx} - \frac{\partial(u'v')}{\partial y} \quad \dots (2)$$

ここに、 $u = x$ -方向流速、 $v = y$ -方向流速、 $g =$ 重力加速度、 $u' = x$ -方向流速変動、 $v' = y$ -方向流速変動、 $h =$ 水深。

平均流速の分布形: 放出口より十分下流の流れの確立領域では平均流速分布は相似分布形に従う。図から明らかのように流速分布は、厚さ δ の内層と平均流速形状が相似である厚さ $(h - \delta)$ の外層の二つの領域に区別される。内層と外層における平均流速を従来の実験結果に基づき、次のように仮定する。

$$\text{内層 } (0 \leq y \leq \delta); \quad \frac{u}{u_m} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^n \quad \dots (3) \quad \text{外層 } (\delta \leq y \leq h); \quad u = u_0 + (u_m - u_0) \exp \left[-4c \left(\frac{y - \delta}{h - \delta} \right)^2 \right] \quad \dots (4)$$

ここに、 $u_0 =$ 水表面での流速、 $u_m =$ 最大流、 $\delta =$ 境界層厚、 $n = 1/7$ 、 $c =$ 定数($=0.693$)

ストリップ・インテグラル法: 連続方程式を全水深で、乱流境界層方程式を三つのストリップS1、S2、S3に分割し、積分を行なうと四つの一次元連立常微分方程式が得られる。無次元パラメータ $x^* = x/D$ 、 $h^* = h/D$ 、 $\delta^* = \delta/D$ 、 $u_m^* = u_m/U$ と $u_0^* = u_0/U$ を導入すると、未知数 $h^*(x^*)$ 、 $\delta^*(x^*)$ 、 $u_m^*(x^*)$ 、及び $u_0^*(x^*)$ に対して、式(5)~(8)の常微分方程式が得られる。

$$c_{11} \frac{dh^*}{dx^*} + c_{12} \frac{d\delta^*}{dx^*} + c_{13} \frac{du_0^*}{dx^*} + c_{14} \frac{du_m^*}{dx^*} = 0 \quad \dots (5)$$

$$c_{21} \frac{dh^*}{dx^*} + c_{22} \frac{d\delta^*}{dx^*} + c_{23} \frac{du_0^*}{dx^*} + c_{24} \frac{du_m^*}{dx^*} = \frac{\tau_\delta - \tau_0}{\rho} \quad \dots (6)$$

$$c_{31} \frac{dh^*}{dx^*} + c_{32} \frac{d\delta^*}{dx^*} + c_{33} \frac{du_0^*}{dx^*} + c_{34} \frac{du_m^*}{dx^*} = \frac{-\tau_m + \tau_\delta}{\rho} \quad \dots (7)$$

$$c_{41} \frac{dh^*}{dx^*} + c_{42} \frac{d\delta^*}{dx^*} + c_{43} \frac{du_0^*}{dx^*} + c_{44} \frac{du_m^*}{dx^*} = \frac{\tau_\delta}{\rho} \quad \dots (8)$$

ここに、 $U =$ 流出流速、 $D =$ ゲートの開き、 τ_0 、 τ_δ 、 τ_m はそれぞれ $y = 0$ 、 δ 、 y_m でのせん断応力、 $C_{ij} = C_{ij}(h^*, \delta^*, u_0^*, u_m^*)$ 、 $y_m =$ 底面から最大せん断応力点までの距離。

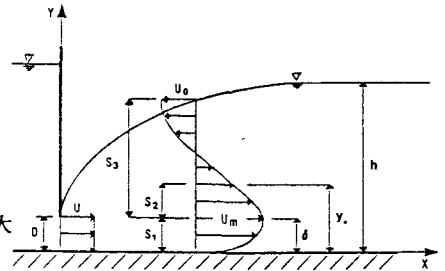


図-1. 定義図

τ_0 及び τ_m の決定: 式(10)の C_i を底面抵抗係数として、境界でのせん断応力 τ_0 は式(9)のように与えられる。

$$\tau_0 = C_i \rho \frac{u_m^2}{2} \quad \dots (9), \quad C_i = \frac{0.0565}{(u_m \delta / \nu)^{0.25}} \quad \dots (10)$$

一方、最大せん断応力 τ_m は断面平均k-εモデルより決定する。式(7)中の τ_m は式(11)と式(12)で与えられる k^* と ε を解き、式(14)より求める。

$$\frac{dk^*}{dx^*} = 2C_0 \frac{k^*}{\varepsilon \cdot h^3} \left(\frac{dh^*}{dx^*} \right)^2 + 0.5 C_0 \frac{k^*}{\varepsilon} \gamma - 0.5 \frac{\varepsilon \cdot h^*}{k^*} \quad \dots (11)$$

$$\frac{d\varepsilon^*}{dx^*} = 4C_0 C_i \frac{k^*}{h^3} \left(\frac{dh^*}{dx^*} \right)^2 + C_0 C_i k^* \gamma - C_2 \frac{\varepsilon^3 h^*}{k^2} \quad \dots (12)$$

ここに、 $k^* = (\bar{K})^{1/2} / U$ 、 $\varepsilon^* = \bar{\varepsilon} D / U^3$ 、 $\bar{K} =$ 断面平均 k 、 $\bar{\varepsilon} =$ 断面平均 ε 、 C_0 、 C_i 、 $C_2 =$ モデル定数、 γ は式(13)で与えられる。

$$\gamma = \int_0^{h^*} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y_x} \right)^2 dy \dots (13), \quad \frac{\tau}{\rho} = \bar{v}_t \frac{\partial u}{\partial y} \dots (14), \quad \text{ここに, } \bar{v}_t = C_0 \frac{k^2}{\varepsilon}$$

境界条件: 流れの発達領域に連続の式及び運動量の式を適用すると、平均流に対する境界条件を与える式(15)及び(16)が得られる。

$$UD = \int_0^h u dy \dots (15), \quad U^2 D + g \frac{h_d^2}{2} = \int_0^h u^2 dy + g \frac{h^2}{2} + C_1 x_0 \frac{U^2}{2} \dots (16)$$

ここに、 h_d =ゲートでの初期深さ、 x_0 =ポテンシャルコアの長さ(=4D)。

式(15)と(16)に式(3)と(4)を代入し、 y に関して0から δ までと、 δ から h まで積分して、式(17)と(18)が得られる。

$$UD = \frac{u_m \delta}{n+1} + u_0 (h - \delta) + (u_m - u_0) (h - \delta) A^* \dots (17)$$

$$g \frac{h_d^2}{2} + D U^2 = g \frac{h^2}{2} + \frac{u_m^2 \delta}{2n+1} + 2 u_0 (u_m - u_0) (h - \delta) A^* + u_0^2 (h - \delta) E^* + C_1 x_0 \frac{U^2}{2} \dots (18)$$

ここに、 $A^* = 0.25(\pi/c)^{1/2} \operatorname{erf}(2(c)^{1/2})$, $E^* = 0.25(\pi/2c)^{1/2} \operatorname{erf}(2(2c)^{1/2})$ 。

$\delta = D/2$ と $u_m = U$ と仮定することにより、式(17)と(18)より境界条件 u_0 と h が求められる。k-εモデルに対する境界条件としては、 $\bar{\varepsilon}_0 = u_*^2 U/h$ 及び $\bar{v} v u \cdot h = 0.0765$ を用いた。ここに、 u_* =摩擦速度(= $\Delta E g h / 4D$)¹⁴, ΔE =エネルギー損失。

3. 計算値と実験値との比較

式(5),(6),(7),(8),(11),及び(12)をHammingの予測子修正子法により与えられた境界条件のもとで解くことによって、水表面での逆流流速 $u_{0*}(x)$ 、最大流速 $u_m(x)$ 、境界層厚 $\delta(x)$ 、及び水深 $h(x)$ が得られる。一般に、モデル定数 C_0, C_1, C_2 の標準値は $C_0 = 0.09, C_1 = 1.44, C_2 = 1.92$ のように同定されている(Rodi, 1980)。Rouseら(1958)によって得られた空気流における跳水に関する実験結果と比較より、本研究では、 $C_0 = 0.09, C_1 = 1.44, C_2 = 1.75$ が最適な結果を与えるようである。これは、断面平均を行なった結果と考えられる。無次元の水面形 h^* と境界層厚 δ^* に関する実験値と計算値との比較を図-2、無次元の最大流速 u_m と表面流速 u_{0*} に関する実験値と計算値との比較を図-3に示す。また、共役水深に関するBelangerの理論値との比較を図-4に示す。

4. 参考文献

- Mc Corquodale, Hydraulic Jumps and Internal Flows, in Cp.6
Encyclopedia of Fluid Mech. 1986.
Rodi, Turbulence Models and Their Application in
Hydraulic, IA HR, 1980.
Rouse et al., Turbulence Characteristics of The Hydraulic Jump.
J. Hy. Div. ASCE, 1958
Sigalla, Mesurement of Skin Friction in a Plane Turbulent Wall
Jet, J. Royal Aero. Socieity, 1958

謝辞: 本論文の作成にあたって、川村清一君(九工大4年)の熱心な協力を得た。記して謝意を表します。

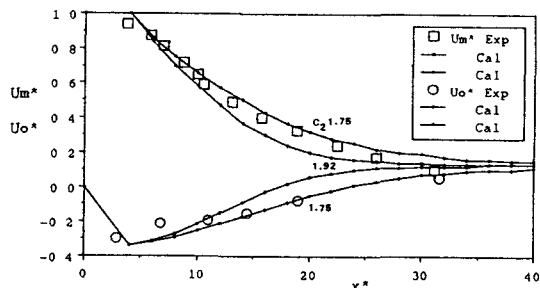


図-3. 実験値との比較

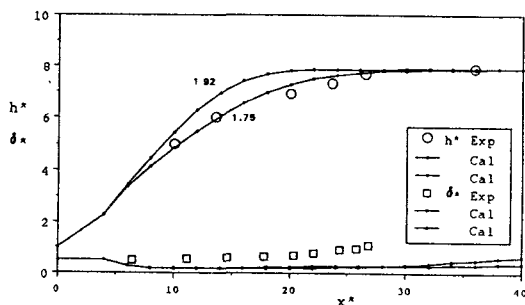


図-2. 実験値との比較

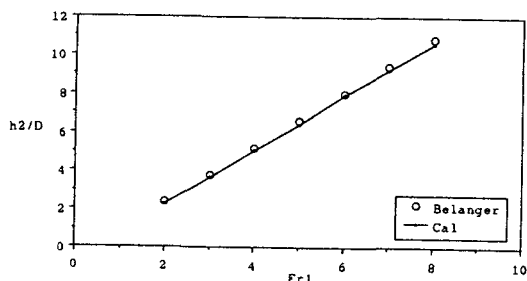


図-4. Belangerの理論値との比較