

Pasternak基礎上の長方形板の動的安定性

長崎大学工学部 学生員 ○其田智洋
 長崎大学工学部 正 員 高橋和雄
 長崎大学工学部 学生員 中村敏朗

1. まえがき 構造物の動的安定性の研究は、これまで数多く行われており、Applied Mechanics Reviewで、この10年間の総括が行われようとしている。最近の研究の動向として、宇宙構造物や制振を取り扱った研究が増えている。たとえば、構造物と熱との相関、複合材料、境界もしくは内部で弾性支持された場合や変断面などの場合に拡張されつつある。Kar¹⁾はPasternak基礎上の変断面片持ちばりに熱勾配がある場合の動的安定性を解析している。われわれは、Karの解析を平板に拡張することを計画している。本研究は、その第一段階として、Pasternak基礎上の長方形板の動的安定性を各種の境界条件、Pasternak基礎のパネおよびせん断層の剛性パラメーターのもとに解析するものである。

2. 運動方程式および解法 図-1に示すようなパネとせん断層からなるPasternak基礎上の長方形板が静的面内力と変動面内力を受ける場合の運動方程式は次のように与えられる²⁾。

$$L(w) = D \nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + K_s w - K_a \nabla^2 w + (N_{x0} + N_{xt} \cos \Omega t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

ここに、 $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ ：板剛度、 E ：ヤング率、 h ：板厚、 ν ：ポアソン比、 w ：たわみ、 ρ ：板の密度、 K_s ：弾性基礎のパネ定数、 K_a ：せん断層の剛性、 $\nabla^2 = (\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)$ 、 x, y ：平板中央面の座標系、 Ω ：変動面内力の円振動数、 t ：時間。

長方形板の境界条件は、つぎの4種類を考える。

CASE I：全周辺単純支持、CASE II：荷重辺単純支持、

他対辺固定、CASE III：荷重辺固定、他対辺単純支持、

CASE IV：全周辺固定。

式(1)の一般解を次のように仮定する。

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{mn}(t) W_{mn}(x, y) \quad (2)$$

ここに、 T_{mn} ：時間関数、 W_{mn} ：境界条件を満足する座標関数で次式の関数を用いる。

$$W_{mn} = h_m(\xi) \bar{h}_n(\eta) \quad (3)$$

ここに、 $h_m(\xi) = \sin m\pi\xi$ (CASE I, II), $h_m(\xi) = \cos(m-1)\pi\xi - \cos(m+1)\pi\xi$ (CASE III, IV)

$\bar{h}_n(\eta) = \sin n\pi\eta$ (CASE I, III), $\bar{h}_n(\eta) = \cos(n-1)\pi\eta - \cos(n+1)\pi\eta$ (CASE II, IV)

式(2)を式(1)に代入すれば次式が得られる。

$$L(w) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [h_m \bar{h}_n T_{mn} + \frac{\pi^4}{k_{11}^4} \{ (\frac{1}{\beta^4} f_m \bar{h}_n + \frac{2}{\beta^2} g_m \bar{g}_n + h_m \bar{f}_n) + \kappa_s^* h_m \bar{h}_n + \kappa_a^* (\frac{1}{\beta^2} g_m \bar{h}_n + h_m \bar{g}_n) \} T_{mn} - \frac{\pi^4 \lambda_{cr}}{k_{11}^4 \beta^2} (\bar{N}_{x0} + \bar{N}_{xt} \cos \bar{\omega} \tau) g_m \bar{h}_n T_{mn}] = 0 \quad (4)$$

ここに、 $g_m(\xi) = m^2 \sin m\pi\xi$ (CASE I, II), $g_m(\xi) = (m-1)^2 \cos(m-1)\pi\xi - (m+1)^2 \cos(m+1)\pi\xi$ (CASE III, IV)

$f_m(\xi) = m^2 \sin m\pi\xi$ (CASE I, II), $f_m(\xi) = (m-1)^2 \cos(m-1)\pi\xi - (m+1)^2 \cos(m+1)\pi\xi$ (CASE II, IV)

$\beta = a/b$ ：縦横比、 $\kappa_s^* = K_s b^4/D\pi^4$ 、 $\kappa_a^* = K_a b^2/D\pi^2$ 、 k_{11} ：振動の1次の固有値、 λ_{cr} ：座屈固有値、 $\bar{N}_{x0} = N_{x0}/N_{cr}$ 、 $\bar{N}_{xt} = N_{xt}/N_{cr}$ 。

式(4)にGalerkin法を適用する。すなわち、

$$\iint L(w) h_r \bar{h}_s d\xi d\eta = 0 \quad (5)$$

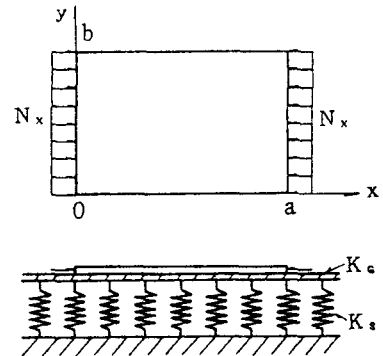


図-1 Pasternak基礎上の長方形板の一般図

ここに、 $r=1, 2, \dots, N$, $s=1, 2, \dots, N$

$$\sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N [G_{mrns} T_{mn} + \frac{\pi^4}{k_{11}^4} E_{mrns} T_{mn} - \frac{\pi^4 \lambda_{cr}}{k_{11}^4 \beta^2} (\bar{N}_{x0} + \bar{N}_{xt} \cos \bar{\omega} \tau) F_{mrns} T_{mn}] = 0 \quad (6)$$

ここに、 $G_{mrns} = I_{mr}^1 \bar{I}_{ns}^1$,

$$E_{mrns} = \frac{1}{\beta^4} I_{mr}^3 \bar{I}_{ns}^1 + \frac{2}{\beta^2} I_{mr}^2 \bar{I}_{ns}^2 + I_{mr}^1 \bar{I}_{ns}^3 + \kappa_s^* I_{mr}^1 \bar{I}_{ns}^1 + \kappa_a^* \left(\frac{1}{\beta^2} I_{mr}^2 \bar{I}_{ns}^1 + I_{mr}^1 \bar{I}_{ns}^2 \right),$$

$$F_{mrns} = \frac{1}{\beta^2} I_{mr}^2 \bar{I}_{ns}^1$$

上式を行列表示すると、次式が得られる。

$$\{T\} + ([A] + \bar{N}_{x0} [B]) \{T\} + \bar{N}_{xt} \cos \bar{\omega} \tau [B] \{T\} = \{0\} \quad (7)$$

ここに、 $[A] = \frac{\pi^4}{k_{11}^4} [G]^{-1} [E]$, $[B] = -\frac{\pi^4 \lambda_{cr}}{k_{11}^4 \beta^2} [G]^{-1} [F]$, $\{T\} = (T_{11} T_{12} \dots T_{1N} T_{21} T_{22} \dots T_{NN})^T$

$$[G] = G \{s+(r-1)N, n+(m-1)N\}, [E] = E \{s+(r-1)N, n+(m-1)N\}, [F] = F \{s+(r-1)N, n+(m-1)N\}$$

式(7)は連立のMathieuの方程式で

ある。文献2)の方法を用いて不安定領域を境界条件、縦横比 β 、バネ定数 κ_s^* 、せん断定数 κ_a^* のパラメーターのもとに解析することができる。

3. 数値結果 図-2は、全周辺単純支持(CASE I)の場合の不安定領域を $\beta=1.0$ のもとで $\kappa_s^*=2.0$, $\kappa_a^*=2.0$ の場合を示したものである。図中の縦軸は変動面内力の振幅 $\bar{N}_{xt}$ を、横軸は静的面内力 $\bar{N}_{x0}=0$ のときの1次の固有円振動数で無次元化した励振振動数 $\bar{\omega}$ である。図中の右上がりの斜線部が単純共振 $2\omega_i/k$ の不安定領域を意味する。

図-3, 4は、 κ_a^* がない場合とある場合について、 κ_s^* を変化させた場合、変動面内力 $\bar{N}_{xt}=0.5$ における不安定領域の幅の変動をプロットしたものである。

4. まとめ 他の境界条件(CASE II, III, IV)についての数値結果は講演時に発表する。

参考文献

- 1) Kar, R.C. and Sujata, T.: Computer & Structures(1988), Vol. 29, No. 4, pp. 591-599.
- 2) Takahashi, K.: Journal of Sound and Vibration(1982), 85, pp. 257-262.

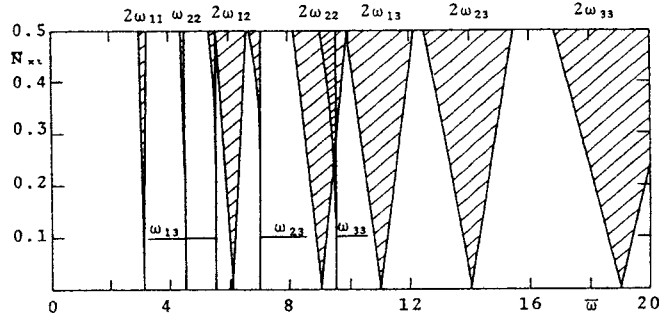


図-2 不安定領域 ($\kappa_s^*=2.0$, $\kappa_a^*=2.0$, $\bar{N}_{x0}=0.0$)

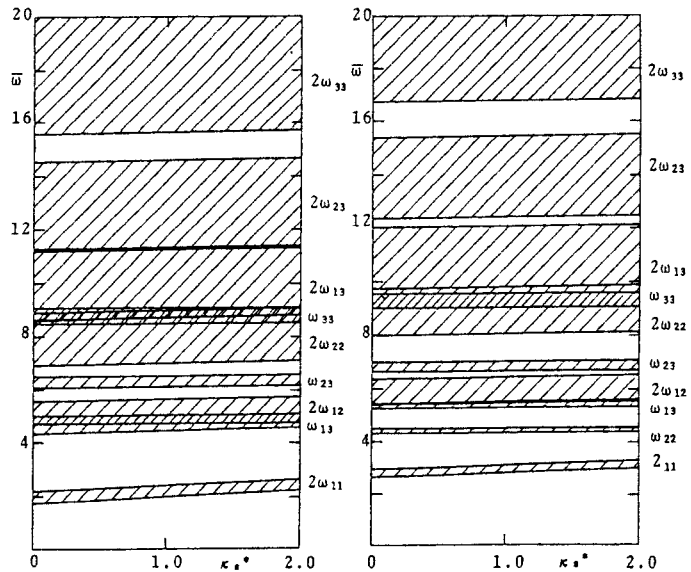


図-3 $\kappa_a^*=0.0$ のとき

図-4 $\kappa_a^*=2.0$ のとき

不安定領域の変動図