

Pasternak基礎上の平板の振動及び座屈

長崎大学工学部 学生員 ○中村 敏朗

長崎大学工学部 正員 高橋 和雄

長崎大学工学部 学生員 其田 智洋

1. まえがき 弾性基礎上の平板の力学解析では、基礎をWinkler基礎とみなすモデル化が多い。Winkler基礎では荷重と反力が1対1で釣合うために、構造物の載る部分と載らない部分とで、たわみが不連続となるなど実際と異なる不一致が認められる¹⁾。Pasternakはバネ上部がせん断層で結びついているとし、せん断剛性を使った改良モデルを提案している。Pasternak基礎上の平板の静的解析はかなり行なわれているが、動的安定性まで取り扱った研究はないようである。動的安定性を取り扱うためには、Pasternak基礎上の平板の振動及び座屈を明らかにしなければならない。そこで、本研究では、Pasternak基礎上の長方形板の振動及び座屈を各種の境界条件、ばね及びせん断層パラメーターのもとに明らかにするものである。

2. 運動方程式及び解法 図-1に示すようなバネとせん断層からなるPasternak基礎上の長方形板が面内力 N_x を受ける場合の運動方程式は次のように与えられる¹⁾。

$$L(w) = D \nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k_s w - G \nabla^2 w + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

ここに、 $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$: 板剛度、 E : ヤング率、 h : 板厚、 ν : ポアソン比、 w : たわみ、 ρ : 板の密度、 k_s : 弾性基礎のバネ定数、 G : せん断層の剛性、 x, y : 平板中央面の座標系、 t : 時間、 $\nabla^4 = (\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)^2$

長方形板の境界条件は、次の4種類を考える。

CASE I : 全周辺単純支持、CASE II : 荷重辺単純支持、他対辺固定、CASE III : 荷重辺固定、他対辺単純支持、

CASE IV : 全周辺固定

式(1)の一般解を次のように仮定する。

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{mn}(t) W_{mn}(x, y) \quad (2)$$

ここに、 T_{mn} : 時間関数(自由振動では $T_{mn} = A_{mn} e^{i\omega t}$ と置くことができる)、 W_{mn} : 境界条件を満足する座標関数で次式の関数を用いる。

$$W_{mn} = h_m(\xi) \bar{h}_n(\eta) \quad (3)$$

ここに、 $h_m(\xi) = \sin m\pi\xi$ (CASE I, II), $h_m(\xi) = \cos(m-1)\pi\xi - \cos(m+1)\pi\xi$ (CASE III, IV)

$\bar{h}_n(\eta) = \sin n\pi\eta$ (CASE I, III), $\bar{h}_n(\eta) = \cos(n-1)\pi\eta - \cos(n+1)\pi\eta$ (CASE II, IV)

式(2)を式(1)に代入すれば自由振動の場合に対して次式が得られる。

$$L(w) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left\{ \left(-\frac{1}{\beta^4} f_m \bar{h}_n + \frac{2}{\beta^2} g_m \bar{g}_n + h_m \bar{f}_n \right) + \kappa_s^* h_m \bar{h}_n + \kappa_0^* \left(-\frac{1}{\beta^2} g_m \bar{h}_n + h_m \bar{g}_n \right) - N_x \frac{1}{\beta^2} g_m \bar{h}_n - \lambda \nu^4 h_m \bar{h}_n \right\} \quad (4)$$

ここに、 $g_m(\xi) = m^2 \sin m\pi\xi$ (CASE I, II), $g_m(\xi) = (m-1)^2 \cos(m-1)\pi\xi - (m+1)^2 \cos(m+1)\pi\xi$ (CASE III, IV)

$f_m(\xi) = m^4 \sin m\pi\xi$ (CASE I, II), $f_m(\xi) = (m-1)^4 \cos(m-1)\pi\xi - (m+1)^4 \cos(m+1)\pi\xi$ (CASE III, IV)

$\beta = a/b$: 縦横比、 $\kappa_s^* = k_s b^4/D\pi^4$, $\kappa_0^* = Gb^2/D\pi^2$, $N_x = N_x b^2/D\pi^2$, $\lambda \nu^4 = \rho h b^4/D\pi^4$ (振動の固有値)

式(4)にGalerkin法を適用する。

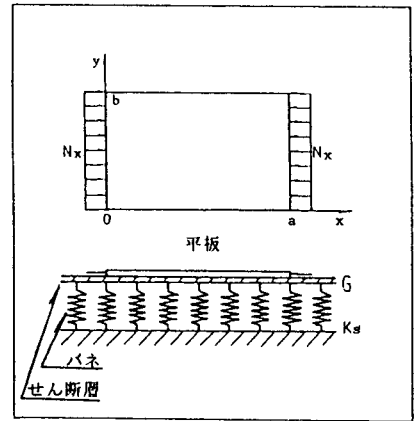


図-1 Pasternak基礎上の長方形板の一般図

$$\iint L(w) h_r \bar{h}_s d\xi d\eta = 0 \quad (5)$$

ここに、 $r=1, 2, \dots, N, s=1, 2, \dots, N$

積分を実行してまとめると、

$$\sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N A_{mn} (E_{mrns} - N_x F_{mrns} - \lambda_v G_{mrns}) = 0 \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \text{ここに、} \quad E_{mrns} &= \frac{1}{\beta^4} l'_{mr} l'_{ns} + \frac{2}{\beta^2} l'_{mr} l'_{ns} + l'_{mr} l'_{ns} \\ &\quad + \kappa_s^* l'_{mr} l'_{ns} + \kappa_d^* \left(\frac{1}{\beta^2} l'_{mr} l'_{ns} + l'_{mr} l'_{ns} \right), \\ F_{mrns} &= \frac{1}{\beta^2} l'_{mr} l'_{ns}, \quad G_{mrns} = l'_{mr} l'_{ns} \end{aligned}$$

式(6)は次のように行列表示される。

$$([E] - N_x [F] - \lambda_v [G]) \{X\} = \{0\} \quad (7)$$

ここに、 $[E]: E(s+(r-1)N, n+(m-1)N), [F]: F(s+(r-1)N, n+(m-1)N)$

$[G]: G(s+(r-1)N, n+(m-1)N), [A]: \{A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1N}, A_{21},$

$A_{22}, \dots, A_{NN}\}^T$

$N_x=0$ とおけば、自由振動の固有値 λ_v が得られる。

$\lambda_v=0$ とおけば $N_x=\lambda_b$ の座屈固有値が得られる。数値計算においては、式(7)を行列の固有値問題に変換する。

3. 数値結果 (1)固有振動特性 図-2に

Pasternak基礎上の周辺単純支持正方形板

(CASE I、 $\beta=1$)の固有振動特性を示す。図-2に

において、縦軸 $\bar{\omega}$ は無次元振動数($\kappa_s^*=\kappa_d^*=0$ のときの1次の固有円振動数で無次元化)で横軸 κ_d^* はせん断層の剛性である。 $\kappa_d^*=0$ の場合はWinkler基礎に相当する。 κ_s^* および κ_d^* はともに固有振動数を

を増加させるが、 κ_s^* と κ_d^* の効果は高次振動になるほど小さくなる。

(2)座屈特性 図-3にPasternak基礎上の長方形板(CASE II、

$\kappa_s^*=\kappa_d^*=2.0$)の座屈曲線を示す。Pasternak基礎上の長方形板の座屈

パターンも弾性基礎のない場合と同じ特性を示す。図-4に最低次の座屈固有値 λ_{min} とせん断層の剛度 κ_d^* との関係(CASE II)を κ_s^*

をパラメーターに示す。 κ_s^* および κ_d^* は座屈荷重を増大させる効果を持つ。

4. まとめ 固有有振動数および座屈荷重に及ぼす境界条件およびPasternak基礎のパラメーターの詳しい結果は、講演当日に発表する。

参考文献 成岡、中村編：骨粗構造解析法要覧、第18章 弾性基礎上の梁、pp.379~398, 1976, 培風館

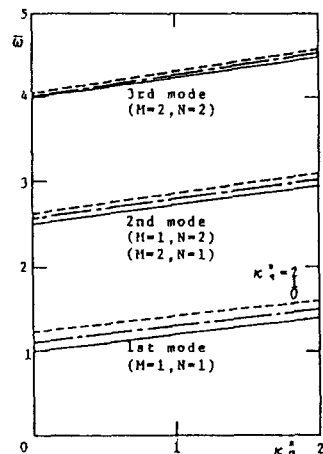


図-2 Pasternak基礎上の正方形板の固有振動数比 (CASE I, $\beta=1$)

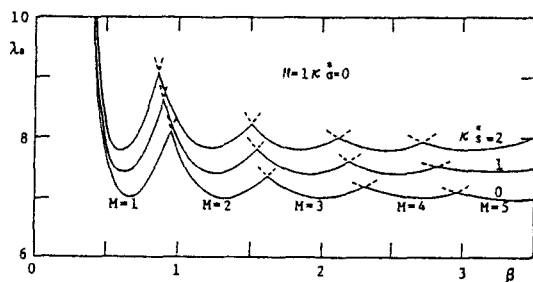


図-3 長方形板の座屈曲線(CASE II)

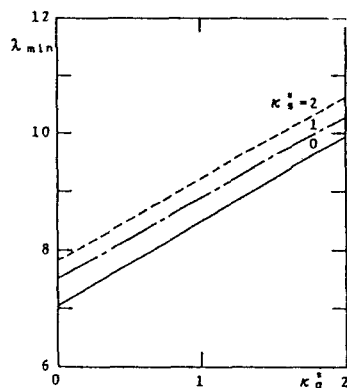


図-4 最低時の座屈固有値 λ_{min} とせん断層の剛度 κ_d^* との関係(CASE II)