

面内圧縮荷重を受ける 矩形板の幾何学的非線形解析

長崎大学 正 員 森田千尋
長崎大学 正 員 崎山 毅
長崎大学 正 員 松田 浩
長崎大学 ○学生員 富重健一

1. まえがき

平板が外力を受けて変形する場合、板厚が比較的厚くたわみが板厚に比べて小さい場合には、通常、荷重と平板の変形は比例しその挙動は線形である。しかしながら、板厚が薄くたわみが板厚と同程度の大きさになる場合は、面内力が変形の影響を受けて変化し、またそれらの面内力は変形に影響を与えるため、荷重と変形は比例せず、平板は非線形挙動を示す。

一般に、このような非線形挙動を支配する基礎微分方程式は非線形であり、それを直接解いて平板の挙動を解析することは容易ではない。

本文ではこれらのことを考慮した矩形板の幾何学的非線形問題に関して、基礎微分方程式の積分方程式への変換と積分方程式の近似解法の応用とにより、矩形板の離散的な一般解を求め、これに基づいて面内圧縮荷重を受ける矩形板の解析法を提示するものである。

2. 矩形板の増分形基礎微分方程式および離散的な一般解

平板のせん断力を Q_y, Q_x 、ねじりモーメントを M_{xy} 、曲げモーメントを M_y, M_x 、たわみ角を θ_y, θ_x 、たわみを w とすれば、板の横荷重のほかに板の中央面に作用する面内力 N_{xy}, N_y, N_x を受けた場合、せん断変形の影響を考慮したMindlinの理論に基づく矩形板の基礎微分方程式は、以下ようになる。

$$\frac{\partial \Delta Q_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta Q_y}{\partial y} - \frac{N_x - \nu N_y}{D(1-\nu^2)} \Delta M_x - \frac{N_y - \nu N_x}{D(1-\nu^2)} \Delta M_y - \frac{2N_{xy}}{D(1-\nu)} \Delta M_{xy} + \Delta q + \Delta N_c = 0 \quad (1-1)$$

$$\frac{\partial \Delta M_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta M_{xy}}{\partial y} - \Delta Q_x = 0 \quad (1-2) \quad \frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial x} + \frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial y} = \frac{2 \Delta M_{xy}}{D(1-\nu)} \quad (1-6)$$

$$\frac{\partial \Delta M_y}{\partial y} + \frac{\partial \Delta M_{xy}}{\partial x} - \Delta Q_y = 0 \quad (1-3) \quad \frac{\partial \Delta w}{\partial x} + \Delta \theta_x = \frac{\Delta Q_x}{\kappa G h} \quad (1-7)$$

$$\frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial y} = \frac{\Delta M_x}{D} \quad (1-4) \quad \frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \Delta \theta_y = \frac{\Delta Q_y}{\kappa G h} \quad (1-8)$$

$$\frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial x} = \frac{\Delta M_y}{D} \quad (1-5)$$

また板の中央面上の x, y 方向の面内変位成分を u, v とすれば、面内力 N_{xy}, N_y, N_x との間には次のような関係がある。

$$\frac{\partial \Delta N_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (2-1) \quad \frac{\partial \Delta u}{\partial x} + \nu \frac{\partial \Delta v}{\partial y} + \Delta W_{xc} = \frac{\Delta N_x}{F} \quad (2-3)$$

$$\frac{\partial \Delta N_y}{\partial y} + \frac{\partial \Delta N_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (2-2) \quad \frac{\partial \Delta v}{\partial y} + \nu \frac{\partial \Delta u}{\partial x} + \Delta W_{yc} = \frac{\Delta N_y}{F} \quad (2-4)$$

$$\frac{\partial \Delta u}{\partial y} + \frac{\partial \Delta v}{\partial x} + \Delta W_{xyc} = \frac{2 \Delta N_{xy}}{F(1-\nu)} \quad (2-5)$$

ここに、 $q=q(x,y)$:横荷重強度、 E :弾性係数、 $G=E/2(1+\nu)$:せん断弾性係数、 $\kappa=5/6$:せん断修正係数、 $h=h(x,y)$:板厚、 $D_0=D(x,y)=Eh^3/12(1-\nu^2)$:板の曲げ剛度、 $F=F(x,y)=Eh/(1-\nu^2)$:板の伸び剛度、 ν :ポアソン比、 ΔN_0 、 ΔW_{x0} 、 ΔW_{y0} 、 ΔW_{xy0} :各増分荷重段階における不平衡力及び非線形項面外変形に関する式(1-1)～(1-8)、面内変形に関する式(2-1)～(2-5)において、次の無次元量 $X_1 \sim X_3$ 、 $X_9 \sim X_{13}$ 及び η 、 ξ

$$\begin{aligned} X_1 &= a^2 Q_y / [D_0 (1 - \nu^2)], X_2 = a^2 Q_x / [D_0 (1 - \nu^2)], X_3 = a M_{xy} / [D_0 (1 - \nu^2)], X_4 = a M_y / [D_0 (1 - \nu^2)], \\ X_5 &= a M_x / [D_0 (1 - \nu^2)], X_6 = \theta_y, X_7 = \theta_x, X_8 = w/a, \eta = x/a, \xi = y/b, \\ X_9 &= v/a, X_{10} = u/a, X_{11} = a^2 N_{xy} / [D_0 (1 - \nu^2)], X_{12} = a^2 N_y / [D_0 (1 - \nu^2)], X_{13} = a^2 N_x / [D_0 (1 - \nu^2)], \\ a, b &: \text{矩形板の縦横の辺長}, \mu = b/a, h_0: \text{基準板厚}, D_0 = Eh_0^3 / [12(1 - \nu^2)]: \text{基準板曲げ剛度} \end{aligned}$$

を導入し無次元化後、微分方程式の積分方程式への変換と積分方程式の近似解法の応用により、任意の離散点 (i,j) における離散解 $\Delta X_{p,i,j}$ ($p=1 \sim 8$)、($p=9 \sim 13$)はそれぞれ次のように整理される。

$$(p=1 \sim 8) \quad X_{p,i,j} = \sum_{d=1}^3 \left(\sum_{k=0}^i a_{p,i,j,k,d} \cdot \Delta X_{r,k,0} + \sum_{l=0}^j b_{p,i,j,l,d} \cdot \Delta X_{s,0,l} \right) + q_{p,i,j} \quad (3-1)$$

($r=1,3,4,6,7,8, s=2,3,5,6,7,8$)

$$(p=9 \sim 13) \quad X_{p,i,j} = \sum_{d=1}^4 \left(\sum_{k=0}^i a_{p,i,j,k,d} \cdot \Delta X_{r,k,0} + \sum_{l=0}^j b_{p,i,j,l,d} \cdot \Delta X_{u,0,l} \right) + q_{p,i,j} \quad (3-2)$$

($t=9,10,11,12, u=9,10,11,13$)

ここに、 $\Delta X_{r,k,0}$ 、 $\Delta X_{s,0,l}$ 等はいわゆる積分定数であり、境界条件によって決定されるものであり、また、係数 $a_{p,i,j,k,d}$ 、 $b_{p,i,j,l,d}$ 、 $q_{p,i,j}$ は伝達マトリックス法における格間伝達マトリックスに相当するものである。この離散的な一般解を求める方法の詳細については、文献1)を参照されたい。

3. 解析結果

数値解析例として初期たわみを有する4辺単純支持板(Pin支持)の板の中央面に、図1に示すような等分布面内圧縮荷重 $P(y)$ が作用する場合の幾何学的非線形解析結果について示す。なお初期たわみは、等分布面外横荷重を作用させることによって与えた。

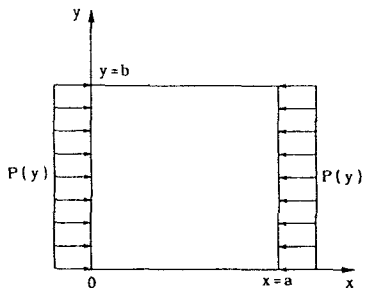


図1 面内圧縮荷重

図2は初期たわみ $w_0/h=0.1$ のとき、横縦方向の分割数 $m=n=4,6,8,10$ をパラメータにとり、中央点に関する荷重～たわみ曲線を図示したものである。

一点鎖線は4分割、破線は6分割、二点鎖線は8分割および実線は10分割の場合であり、8分割、10分割の場合はほぼ一致している。これより分割数を増加させると、収束した解が得られることがわかる。

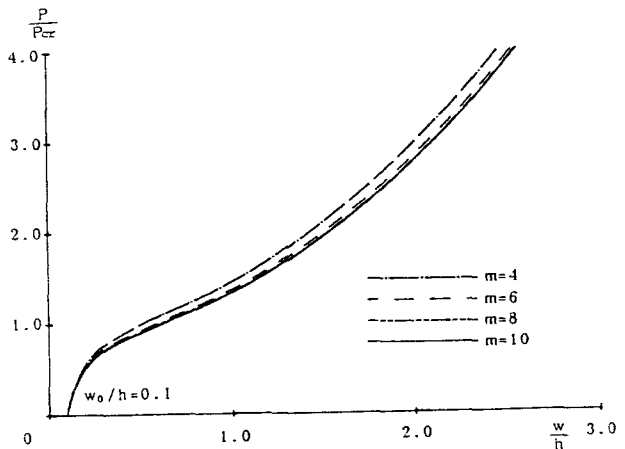


図2 荷重～たわみ曲線

参考文献

- 1) 崎山 毅・松田 浩:変厚矩形板の曲げの一解析法、土木学会論文報告集、第338号、pp.21-28,1983.
- 2) 前田幸雄・林 正・森 寛司:有限帯板法による薄板の有限変位解析、土木学会論文報告集、第316号、pp.23-36,1981.