

変厚偏平シェルの曲げの一解析法

長崎大学	正 員	崎山 毅
長崎大学	〇正 員	松田 浩
長崎大学	正 員	森田千尋
九州大学	正 員	若菜啓孝

1. まえがき

本報告は、基礎微分方程式の積分方程式への変換と積分方程式の近似解法の応用とにより変厚偏平シェルの解析的近似解を求め、これに基づく偏平シェルの解法を提示したものである。①任意の境界条件、荷重条件および変断面性をもつ偏平シェルに対しては、偏平シェルの縦横の等分割線の交点における基礎微分方程式の解析的近似解が求められる。一方、②境界条件が対辺単純支持他対辺任意で、断面変化も単純支持辺に沿って、一方向に変化する偏平シェルに対しては、連立偏微分方程式で表わされた基礎微分方程式を一軸方向に級数展開して連立常微分方程式に変換後、さらに積分方程式に変換し積分方程式の近似解法を応用することにより、基礎微分方程式の近似解が求められる。

2. 偏平シェルの基礎微分方程式

右手系直交座標系を考え、曲面板の変位、断面力および曲面板に作用する外力を定義する。曲面の x 、 y 方向の曲率を k_x, k_y 、ねじれ率を k_{xy} とし、これらがあまり大きくなく、投影形状が矩形の曲面板を考えると、せん断変形の影響を考慮した変厚偏平シェルの曲げの基礎微分方程式は次式のように表せる。

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} - k_x Q_x + q_x = 0 \quad (1-1)$$

$$\frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \frac{\partial \theta_x}{\partial x} = \frac{2M_{xy}}{D(1-\nu)} \quad (1-8)$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} - k_y Q_y + q_y = 0 \quad (1-2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x = \frac{Q_x}{\kappa G h} \quad (1-9)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + k_x N_x + k_y N_y + 2k_{xy} N_{xy} + q_z = 0 \quad (1-3)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + Q_x = 0 \quad (1-4)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y = \frac{Q_y}{\kappa G h} \quad (1-10)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + Q_y = 0 \quad (1-5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} - (k_x + \nu k_y) w = \frac{N_x}{F} \quad (1-11)$$

$$\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \theta_y}{\partial y} = \frac{M_x}{D} \quad (1-6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} - (k_y + \nu k_x) w = \frac{N_y}{F} \quad (1-12)$$

$$\frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \theta_x}{\partial x} = \frac{M_y}{D} \quad (1-7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2k_{xy} w = \frac{2N_{xy}}{F(1-\nu)} \quad (1-13)$$

ここに、 $q_x = q_x(x, y)$, $q_y = q_y(x, y)$, $q_z = q_z(x, y)$: 面に対する接線方向および垂直方向荷重強度, E : 弾性係数, $G = E/2(1+\nu)$: せん断弾性係数, ν : ポアソン比, $h = h(x, y)$: 板厚, $D = D(x, y) = Eh^3/12(1-\nu^2)$: 板の曲げ刚度, $F = F(x, y) = Eh/(1-\nu^2)$: 板の伸び刚度, $\kappa = 5/6$: せん断修正係数, k_x, k_y, k_{xy} : 各軸方向の曲率およびねじれ率

3. 基礎微分方程式の解析的近似解

① 式(1)を無次元化し、積分方程式への変換と積分方程式の近似解法を応用することにより変厚偏平シェルの任意の離散点における解析的近似解は次式のように求められる。

$$X_{0,j} = \sum_{d=1}^{10} \left[\sum_{k=0}^i a_{0,j,k,d} X_{r,k,0} + \sum_{k=0}^j a_{0,j,k,d} X_{s,0,k} \right] + q_{0,j} \quad (2)$$

② y方向に級数展開することを考慮すると、式(1)は $Q_x, M_{xy}, M_x, \theta_y, \theta_x, w, v, u, N_{xy}, N_x$ を独立変数とする次式で与えられる。

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} = -\frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + k_x Q_x - q_x \quad (3-1)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = -\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + k_y Q_y - q_y \quad (3-2)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} = -\frac{\partial Q_y}{\partial y} - k_x N_x - k_y N_y - 2k_{xy} N_{xy} - q_z \quad (3-3)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} = -\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x \quad (3-4)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y \quad (3-5)$$

$$\frac{\partial \theta_x}{\partial x} = -\nu \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \frac{M_x}{D} \quad (3-6)$$

$$\frac{\partial \theta_y}{\partial x} = -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{2M_{xy}}{D(1-\nu)} \quad (3-7)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\theta_x + \frac{Q_x}{\kappa Gh} \quad (3-8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\nu \frac{\partial v}{\partial y} - (k_x + \nu k_y)w = \frac{N_x}{F} \quad (3-9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} + 2k_{xy}w + \frac{2N_{xy}}{F(1-\nu)} \quad (3-10)$$

Q_y, M_y, N_y に対しては次式で定義される。

$$Q_y = \kappa Gh \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \right) \quad M_y = D(1-\nu^2) \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \nu M_x \quad N_y = F(1-\nu^2) \left(\frac{\partial v}{\partial y} - k_y w \right) + \nu N_x \quad (4)$$

$y=0, b$ が単純支持であることを考慮して、式(3)の独立変数を次のように仮定する。

$$\begin{aligned} Q_x &= \sum_n Q_n(x) \sin \alpha_n y & M_{xy} &= -\sum_n M_{xy}(x) \cos \alpha_n y & M_x &= \sum_n M_x(x) \sin \alpha_n y & \theta_y &= -\sum_n \theta_y(x) \cos \alpha_n y & \theta_x &= \sum_n \theta_x(x) \sin \alpha_n y \\ w &= \sum_n w(x) \sin \alpha_n y & v &= -\sum_n v(x) \cos \alpha_n y & u &= \sum_n u(x) \sin \alpha_n y & N_{xy} &= -\sum_n N_{xy}(x) \cos \alpha_n y & N_x &= \sum_n N_x(x) \sin \alpha_n y \end{aligned} \quad (5)$$

ここに、 $\alpha_n y = m\pi/b$ ($m=1, 2, \dots, n$)

式(5)を式(3)に代入し、三角級数関数の直交性を考慮してy方向に積分すると、連立偏微分方程式は連立常微分方程式に変換される。この連立常微分方程式を無次元化したのち、積分方程式への変換と積分方程式の近似解法を応用することにより、任意の線要素における解析的近似解は次のように求められる。

$$X_{\rho i} = \sum_{\sigma=1}^6 a_{\rho i \sigma} X_{\sigma \sigma} + q_{\rho i} \quad (6)$$

4. 数値計算例 ①および②の方法による偏平シェルのたわみおよび曲げモーメントの数値解析結果を厳密解とともに表1に示す。①の結果は $n=8$ $n=12$ の列に、②の結果を $n=10, m=4$ の列に示す。なお、 n は分割数を、 m は三角級数の項数を示す。

参考文献 (1)崎山他：変厚矩形板の曲げの一解析法、土木論集、338、(2)松田他：変厚矩形板の曲げの一簡易解析法、長崎大学研究報告、33、(3)T.Kant, et-al: Mindlin plate analysis by segmentation method, ASCE EM109、(4)D.Bucco, et-al: Static analysis of shallow shells of arbitrary shape - a new approach, Int. J. Num. Methods Engng, 18, 1982

表1 偏平シェルのたわみおよび曲げモーメント

K・	wD/qa ⁴ ($\times 10^{-2}$)				M/qa ² ($\times 10^{-1}$)			
	m=8	m=12	m=10, n=4	Ref. 4	m=8	m=12	m=10, n=4	Ref. 4
0	0.408	0.407	0.407	0.406	0.492	0.484	0.483	0.479
2	0.404	0.403	0.403	0.402	0.486	0.479	0.474	0.473
4	0.392	0.391	0.391	0.390	0.471	0.464	0.458	0.458
6	0.374	0.373	0.372	0.371	0.448	0.440	0.433	0.434
8	0.352	0.350	0.349	0.348	0.418	0.410	0.405	0.404
10	0.326	0.324	0.323	0.321	0.385	0.377	0.372	0.371

$a=b=1, h=0.01, \nu=0.3, K^* = \sqrt{12(1-\nu^2)a^2/Rh}$, R: 曲率半径