

開水路網の水質予測モデルに関する研究

佐賀大学理工学部 ○学 落合裕二 正 古賀憲一 正 荒木宏之
正 井前勝人 正 渡辺訓甫

デルフト工科大学 N. Booijs

1. まえがき 本研究は水量・水質を考慮した開水路網の水管理手法の確立を最終目的としている。そのためには、水量と水質についてのモデルが必要となる。開水路網における流れモデル(水位、流量など)についてはオランダでは種々の計算手法が開発されて、灌漑、雨水排除などの水管理計画に対して実用化されている。¹⁾しかしながら、水質予測についてはモデル化すら成されていないのが現状である。本研究は複雑な開水路網における水質予測モデルについて検討したものである。

2. 手法

A) 開水路網のモデル モデルは、Branch-Nodeモデルと呼ばれるものを採用した。水路網は、Branch(枝)とNode(接点)で構成されるグラフにより表現される(Fig. 1)。各Branchは2つのNodeに接続しており、全てのNode、Branchは、それらの関係を表すリストの番号によって定義される。また、Node番号とBranch番号は互いに独立である。各Branchが数値計算の構成単位となる。

Branch番号mの場合、その両端の濃度は C_{1m} 、 C_{2m} 、Branchに接続するNodeの濃度は $C_{I(m)}$ 、 $C_{J(m)}$ とする(Q_{1m} 、 Q_{2m} はBranch mの両端の流量)(Fig. 2)。

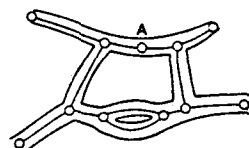


Fig. 1

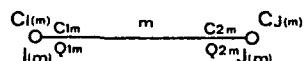


Fig. 2

流れの定式化(運動方程式)については紙面の都合上割愛する。

B) 開水路網の水質モデル 水路網の水の流れ及び水質は深さ方向に一樣とすると、基礎式は次のようになる。

$$\frac{\partial BC}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} - P = 0 \quad (1)$$

B: 濡れ断面積、C: 横断面の平均濃度 $C(t, x)$ 、S: 物質輸送速度 $S(t, x)$ 、P: 水質反応速度 $P(t, x)$

物質輸送速度Sは、拡散の影響を考慮すると次のように与えられる。

$$S = Q \cdot C - A \cdot D_1 \frac{\partial C}{\partial x} \quad (2)$$

D_1 : 移流拡散係数、A: Flow section

定式化は、Galerkin criterion法(FEM法)を用いて行った。

$$\int_0^l \psi_i(x) \left\{ \frac{\partial BC}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} - P \right\} dx = \psi_i S \Big|_0^l + \int_0^l \left\{ -S \frac{\partial \psi_i}{\partial x} - \psi_i \frac{\partial BC}{\partial t} - \psi_i P \right\} dx = 0 \quad (3)$$

ψ_i : Trial function、 $\psi_1 = 1 - x/l$ 、 $\psi_2 = x/l$ (l : Branch長)、 $C = C_1 (=C_{1m}) \psi_1 + C_2 (=C_{2m}) \psi_2$

式(3)を $i=1, 2$ について表すと(下添字はBranch両端を表す)

$$\text{Node I (I(m)) に対し } -S_1 + \frac{l}{3} \frac{\partial B_1 C_1}{\partial t} + \frac{l}{6} \frac{\partial B_1 C_1}{\partial t} + \frac{Q_1 C_1 - Q_2 C_2}{2} - A \cdot D_1 \frac{C_2 - C_1}{l} - \int_0^l \psi_1 P dx = 0 \quad (4)$$

$$\text{Node J (J(m)) に対し } S_2 + \frac{l}{6} \frac{\partial B_2 C_2}{\partial t} + \frac{l}{3} \frac{\partial B_2 C_2}{\partial t} + \frac{Q_1 C_1 - Q_2 C_2}{2} + A \cdot D_1 \frac{C_2 - C_1}{l} - \int_0^l \psi_2 P dx = 0 \quad (5)$$

式(4)、(5)を時間について差分化すると(上添字'+'は時刻 $t+dt$ (dt は時間ステップ)、『-』は時刻 t を表す)

$$\begin{aligned} \text{Node I に対し } S_1^+ - S_1 + \frac{2}{3} l \frac{B_1 C_1^+ - B_1 C_1}{\Delta t} + \frac{1}{3} l \frac{B_2 C_2^+ - B_2 C_2}{\Delta t} + \frac{1}{2} (Q_1^+ C_1^+ + Q_2^+ C_2^+ + Q_1^- C_1^- + Q_2^- C_2^-) \\ - A \cdot D_1 \frac{C_2^+ + C_2^- - C_1^+ - C_1^-}{l} - 2 \cdot \int_0^l \psi_1 P dx \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \text{Node J に対し } S_2^+ - S_2 + \frac{1}{3} l \frac{B_1 C_1^+ - B_1 C_1}{\Delta t} + \frac{2}{3} l \frac{B_2 C_2^+ - B_2 C_2}{\Delta t} + \frac{1}{2} (Q_1^+ C_1^+ + Q_2^+ C_2^+ + Q_1^- C_1^- + Q_2^- C_2^-) \\ - A \cdot D_1 \frac{C_2^+ + C_2^- - C_1^+ - C_1^-}{l} + 2 \cdot \int_0^l \psi_2 P dx \end{aligned} \quad (7)$$

反応項(式(6)、(7)最終項)の定式化: 反応速度Pは一般的に、 x 、 t 、水温等に従属する濃度の複雑な関数である。

その上、時間ステップごとに積分値を計算する必要がある。従って、この積分は、高速で行われ、積分値は Branch 両端の濃度で表現され、精度もある程度のレベルが要求される。本研究では collocation method を適用した。collocation point は、Branch 長で正規化された Branch ($0 \leq z \leq 1$) で $z = 0.2113, 1 - 0.2113$ のところで与えられる。反応項は次のようになる。

$$\int_0^1 \psi_i P dx \approx \frac{\Delta}{2} \{ \psi_i(z) P(z) |_{z=0} + \psi_i(z) P(z) |_{z=1-0} \}$$

$$z = x / \Delta, \quad a = 0.2113$$

$P(z)$ が 2 次の関数までは正しい積分値が得られる。また、2 つ以上の Branch が結合する Node では、拡散が小さいと Node での濃度に不連続が生じる。従って、Branch 内の濃度と Node 内の濃度を区別して、濃度あるいはフラックスの結合条件を考慮する必要がある。つまり、

$$Q_1^* \geq 0 \quad \text{ならば} \quad C_1^* = C_1^+, \quad Q_2^* < 0 \quad \text{ならば} \quad C_2^* = C_1^+ \\ Q_1^* < 0 \quad \text{ならば} \quad S_1^* = Q_1^* C_1^+, \quad Q_2^* \geq 0 \quad \text{ならば} \quad S_2^* = Q_2^* C_2^+ \tag{9}$$

式 (7) 及び (9) から $S_1^*, S_2^*, C_1^*, C_2^*$ の関係が明らかになる。式 (7) は 4 つの未知数に関して線形であり、1 本の Branch について解くべき一般的な方程式は次のように表すことができる。

$$S_1^* = N_{s,1} C_1^+ + N_{s,2} C_2^+ + N_{s,3}, \quad S_2^* = N_{s,4} C_1^+ + N_{s,5} C_2^+ + N_{s,6} \tag{10}$$

また、各 Node での物質貯留は 0 なので、各 Node に対して

$$\sum S = 0 \tag{11}$$

が成り立つ。よって、式 (10)、(11) より未知数を含む連立方程式は次のように得られる。

$$\sum_{j=1}^{j=\max(i)} M_{i,j} C_j + M_{i,0} = 0$$

$$i: \text{Node 番号}, \quad j: \text{ダミー番号}, \quad j_{\max}(i): \text{全 Branch 数} \tag{12}$$

これを解くことにより未知濃度を求めることができる。

3. モデル開水路網による計算例 Fig-3 の開水路網に上述の数値モデルを適用する。水質は BOD、流量は定常状態を仮定した。 $t > 0$ 、Node 1 で汚濁物質が定常流入するものとし、数値シミュレーションにより水質濃度の非定常解析を行う。本例では反応速度を一次式で表し、拡散の影響はないものとする。基礎方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial QL}{\partial x} = -KL \tag{13}$$

L : BOD 濃度、 K : BOD 酸化速度係数

初期条件は $L = L_0$ (L_0 : 初期濃度)、境界条件は $L = L$ 、流量条件は図中に示す通りである。定常時の濃度は Fig-4 のように得られる。

流れの遅いところでの BOD 分解による濃度減少が現れている。本例の場合は厳密解との比較が可能であり、その一致度は良好である。

4. まとめ 本研究では、FEM 法を用い反応を一次関数で表すことで水質モデル及びアルゴリズムの検討を行い、その適用性を示した。理論値と計算値は一致しており、本計算法の有効性が確認された。本モデルの特徴として、1) 行列表示化できるので、複雑な開水路網の水質計算が容易に行える、2) 水質反応による物質変換を一本の Branch について積分しているので、急激な水質変化に対応させるためには Branch 長を短くする必要もある。しかし、量子化誤差等による不安定が生じにくいなどの長所がある。今後、実際の開水路網への適用を行いたい。なお、本研究は日本生命財団「佐賀クリーク網の歴史的考察と環境管理に関する基礎的研究」の補助を受けて行ったものである。

参考文献 1) 古賀憲一、Nico Booij、井前勝人、荒木宏之ら: Numerical Model of Water Quality in Hydraulic Network System, 佐賀大学理工学部集報, 第16巻, 第2号, 1988

