

ポテンシャル接続法(選点解法)を用いた有限振幅波の境界値問題解析法

九州大学工学部 正会員 ○小島治幸 吉田明徳
高松工業高等専門学校 正会員 鶴本良博

1. まえがき

ポテンシャル接続法(領域分割法)は、波動境界値問題の有力な解析手法で、きわめて精度の良い解が得られる。しかし、従来の解法では固有関数に関する積分演算を行うため、理論式の展開は一般に非常に煩雑となり、特に非線形問題への適用は困難であった。本文は、著者ら(1989)が示した、積分演算を行うことなくきわめて簡単に、しかも精度の良い解が得られる解法(選点解法)を摂動法と併用して、有限振幅波(2次のストークス波)と構造物の非線形干渉効果を解析する方法の概略を示すものである。

2. 理論解析法の概略

海域にある構造物に対して、 x の正方向から(2)次の有限振幅波(ストークス波)が入射する場合を考える。1次のオーダーの波(微小振幅波)の振幅を ζ_0 、波数を k 、角周波数を $\sigma(=2\pi/T: T$ は周期)で表し、図-1に示すように流体域を鉛直の境界面によっていくつかの一定水深 $h_i(i=1, 2, \dots)$ の領域に分割する。

速度ポテンシャル $\Phi(x, z, t)$ および水面波形 $\zeta(x, t)$ を微小パラメーター $\epsilon(=k\zeta_0: k$ は入射波の波数)によって、次のように級数展開し、静水面 $z=0$ のまわりでテーラー展開した運動学的および力学的境界条件に代入して、両式より $\eta^{(2)}$ を消去すると $O(\epsilon^2)$ の水面境界条件(2)式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x, z, t) &= \frac{g}{k\sigma} \left\{ \epsilon \phi^{(1)}(x, z, t) + \epsilon^2 \phi^{(2)}(x, z, t) \right\} \\ \zeta(x, t) &= \frac{1}{k} \left\{ \epsilon \eta^{(1)}(x, t) + \epsilon^2 \eta^{(2)}(x, t) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi^{(2)}}{\partial t^2} = & -\frac{1}{k\sigma} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \right)^2 \right\} \\ & -\frac{1}{kg} \eta^{(1)} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、各オーダーのポテンシャルが基本周波数 σ の調和成分の和として表せるものとする $\phi^{(1)}(x, z, t), \phi^{(2)}(x, z, t)$ について各調和成分の次数に関する次式がそれぞれ成り立たねばならない。

$$\phi^{(1)}(x, z, t) = \text{Re} \left[\phi_1^{(1)}(x, z) \exp(i\sigma t) \right] \quad (3)$$

$$\phi^{(2)}(x, z, t) = \text{Re} \left[\phi_0^{(2)}(x, z) + \phi_2^{(2)}(x, z) \exp(i2\sigma t) \right] \quad (4)$$

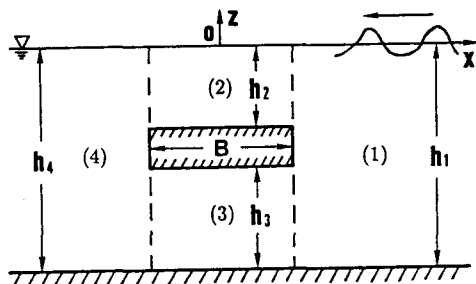


図-1 解析における流体域

自由水面を有する領域では、ポテンシャル関数 $\phi_1^{(1)}$ は、水面と水底の境界条件を満足するラプラス方程式の解として各領域 (i) で、一般に次式のように表せる。

$$\phi_{i1}^{(1)}(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \{ C_{in} \exp(k_{in} x) + D_{in} \exp(-k_{in} x) \} Z(k_{in} z) \quad (5)$$

ただし、 C_{in}, D_{in} は未定係数で、 $Z(k_{in} z)$ は次式で与えられる。

$$Z(k_{in} z) = \frac{\cos k_{in}(z + h_i)}{\cos k_{in} h_i}$$

k_{in} は、 $n=0$ のときは純虚数、 $n \neq 0$ のときは実数として、次式の根で与えられる。

$$\frac{\sigma^2 h_i}{g} = -k_{in} h_i \tan k_{in} h_i \quad (i=1, 2, 4, 5)$$

(3)式を(2)式に代入して得られる $O(\epsilon^2)$ の水面境界条件および水底条件を満足するラプラス方程式の解として、2次のポテンシャル関数は一般に次式で表される。

$$\begin{aligned} \phi_2^{(2)}(x, z) = & \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ C_n^{(2)} \exp(k_n^{(2)} x) + D_n^{(2)} \exp(-k_n^{(2)} x) \right\} Z(k_n^{(2)} z) \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \Pi_{mp}(x, z) \end{aligned} \quad (6)$$

$C_n^{(2)}, D_n^{(2)}$ は $O(\epsilon^2)$ の未定係数で、 $k_n^{(2)}$ は次式で表される角周波数 2σ の分散方程式の根で与えられる。

$$\frac{(2\sigma)^2 h_i}{g} = -k_n^{(2)} h_i \tan k_n^{(2)} h_i \quad (i=1, 2, 4, 5)$$

また $\Pi_{mp}(x, z)$ は $O(\epsilon)$ の諸量より決まる次のような関数である。

$$\Pi_{mp}(x, z) = \frac{\lambda(k_m, k_p)}{\mu_1(k_{mp})} Q_{mp}(x) Z(k_{mp} z)$$

$$+ \frac{\bar{\lambda}(k_m, k_p)}{\mu_1(\bar{k}_{mp})} \bar{Q}_{mp}(x) Z(\bar{k}_{mp} z) \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} k_{mp} &= k_m + k_p \\ \bar{k}_{mp} &= k_m - k_p \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_{mp}(x) &= C_n C_p \exp(k_{mp} x) + D_m D_p \exp(-k_{mp} x) \\ \bar{Q}_{mp}(x) &= C_m D_p \exp(\bar{k}_{mp} x) + C_p D_m \exp(-\bar{k}_{mp} x) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda(k_m, k_p) &= \frac{i}{2k} \left\{ 3 \left(\frac{\sigma^2}{g} \right)^2 + 2k_m k_p + k_p^2 \right\} \\ \bar{\lambda}(k_m, k_p) &= \frac{i}{2k} \left\{ 3 \left(\frac{\sigma^2}{g} \right)^2 - 2k_m k_p + k_p^2 \right\} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \mu_1(k_{mp}) &= \frac{(2\sigma)^2}{g} + k_{mp} \tan k_{mp} h \\ \mu_1(\bar{k}_{mp}) &= \frac{(2\sigma)^2}{g} + \bar{k}_{mp} \tan \bar{k}_{mp} h \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

(6) 式で表される2次のオーダーの一般解に対し、境界面におけるポテンシャルおよびその法線微分の連続条件を適用する。この際、選点解法を用いることによって簡単に未定係数に関する一次関係式を導くことが出来、これらを連立して解けば2次のポテンシャルが決まることになる。各オーダーにおける水面波形は次式で与えられる。

$$\eta^{(1)}(x, t) = \operatorname{Re} \left[\eta_1^{(1)}(x) \exp(i\sigma t) \right] \quad (12)$$

$$\eta_1^{(1)}(x, z) = -i \sum_{n=0}^{\infty} \{ C_n \exp(k_n x) + D_n \exp(-k_n x) \} \quad (13)$$

$$\eta^{(2)}(x, t) = \operatorname{Re} \left[\eta_0^{(2)}(x) + \eta_2^{(2)}(x) \exp(i2\sigma t) \right] \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \eta_2^{(2)}(x) &= -2i \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ C_n^{(2)} \exp(k_n^{(2)} x) \right. \\ &\quad \left. + D_n^{(2)} \exp(-k_n^{(2)} x) \right\} Z(k_n^{(2)} z) + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \\ &\quad \{ H(k_m, k_p) Q_{mp}(x) + \bar{H}(k_m, k_p) \bar{Q}_{mp}(x) \} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \eta_0^{(2)}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \left[\left\{ \alpha(k_m, k_p) + \frac{\sigma^2/g}{2k} \right\} Q_{mp}^*(x) \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \bar{\alpha}(k_m, k_p) + \frac{\sigma^2/g}{2k} \right\} \bar{Q}_{mp}(x) \right] + Q^{(2)} \end{aligned} \quad (16)$$

ただし、定数 $Q^{(2)}$ は、平均水深の基準にとった領域において $\bar{\eta}^{(2)} = 0$ として決まる。式中の係数は次式のようなのである。なお、 $Q_{mp}^*(x)$ 、 $\bar{Q}_{mp}(x)$ は(9)式における C_p 、 D_p 、 k_{mp} をそれぞれの共役複素数で置き換えた式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \alpha(k_m, k_p) &= \frac{-\{(\sigma^2/g)^2 + k_m k_p\}}{4k(\sigma^2/g)} \\ \bar{\alpha}(k_m, k_p) &= \frac{-\{(\sigma^2/g)^2 - k_m k_p\}}{4k(\sigma^2/g)} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} H(k_m, k_p) &= \left\{ -2i \frac{\lambda(k_m, k_p)}{\mu_1(k_{mp})} + \alpha - \frac{\sigma^2/g}{2k} \right\} \\ \bar{H}(k_m, k_p) &= \left\{ -2i \frac{\bar{\lambda}(k_m, k_p)}{\mu_1(\bar{k}_{mp})} + \bar{\alpha} - \frac{\sigma^2/g}{2k} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

3. 計算例

解析例として、没水水平版(版長 $B = 2.00h$ 、版上水深 $h_2 = 0.25h$)と波との非線形干渉による水面波形の変形を調べた。図-2は、 $kh = 1.57$ 、 $\zeta_0/h = 0.04$ の場合の、2周期分の水面波形における理論値と実験値の比較を示しており、理論値が実際の現象を十分よく表現していると考えられる。

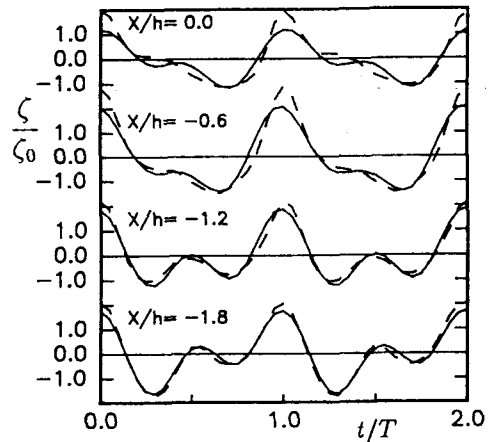


図-2 水面波形の理論値(——)と実験値(---)の比較 $kh = 1.57$ 、 $\zeta_0/h = 0.04$ 、 $B/h = 2.00$ 、 $h_2/h = 0.25$

4. あとがき

ここで提案した解析法により有限振幅波と構造物の非線形干渉問題を容易に解析できることを示した。ただし、一次の解が完全な厳密解ではなくて、数値計算の結果得られる近似解であるため、一次解の精度が2次のオーダーの解の精度に大きく影響することになる。これに関しては数値計算上の処理が必要で、その方法については研究発表会の時に述べる。

参考文献

吉田明徳・小島治幸・鶴本良博：ポテンシャル接続法の選点解法，第36回海岸工学講演会論文集，pp.474-478，1989