

地下塩水くさびに関する境界要素法、

有限要素法の結合解析

九州産業大学 正員 加納正道 福岡大学 正員 黒木健実

九州産業大学 正員 赤坂順三 九州産業大学 学員 樋口善孝

1. まえがき 前報¹⁾で取り扱った地下塩水くさびにみられるような低流速領域の浸透と拡散を取り上げてこれの数値解析を考える。数値解析をするにあたり本報では、境界要素法と有限要素法の結合解析を取り上げる。本法は図-1の様に、 Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 の3つの部分領域に分け、領域 Ω_1 , Ω_3 については領域の塩水の濃度は一定でラプラス方程式によって支配された単一特性の流れの線形領域であるから、ここには計算時間の短い境界要素法を使って浸透流だけで解く。次に Ω_2 の領域は塩水と淡水が混合しているので水圧と濃度の連立非線形方程式により支配された密度の違いによって起こる2特性の合わさった非線形領域であるから、有限要素法を使うことにする。

2. 支配方程式 地下塩水くさび混合拡散は

式(1),(2)に支配される。

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) = 0 \quad (1), \quad \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

これらに用いる密度 ρ , 濃度 c , 流速 v_i , 塩水濃度フラックス $\tilde{q}_i$ 等の関係の式は以下に示される。

$$\rho = \rho_f + (\rho_s - \rho_f)c \quad (3), \quad v_i = -k \left(-\frac{\partial H}{\partial x_i} + \delta_{i2} \frac{\rho}{\rho_f} \right) \quad (4)$$

$$\tilde{q}_i = \frac{q_i}{\rho_s} = -D \frac{\partial c}{\partial x_i} + v_i c \quad (5)$$

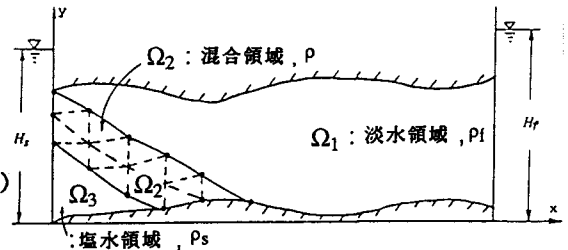


図-1 領域分割図

3. 有限要素法(FEM)による定式化 混合領域 Ω_2 での浸透流と拡散をFEMで取り扱う。式(1),(2)の基礎方程式を展開し部分積分し有限要素近似を行ない、線形の形状関数により離散化を行えば、式(6),(7)となる。

$$\sum_{\beta=1}^3 k \overline{\rho}_e K_{\alpha\beta}^e H_\beta = - \int_{\Gamma_v^e} N_\alpha \rho \hat{v}_n d\Gamma - \frac{c_\alpha}{2\Delta^e} \frac{k}{\rho_f} \sum_{\gamma=1}^3 \sum_{\varepsilon=1}^3 M_{\gamma\varepsilon}^e \rho_\gamma \rho_\varepsilon \quad (6)$$

$$\sum_{\beta=1}^3 \overline{D}_e K_{\alpha\beta}^e C_\beta = - \int_{\Gamma_q^e} N_\alpha \tilde{q}_n d\Gamma - k \overline{C}^e \sum_{\gamma=1}^3 K_{\alpha\gamma}^e H_\gamma - \frac{c_\alpha}{2\Delta^e} \frac{k}{\rho_f} \sum_{\gamma=1}^3 \sum_{\varepsilon=1}^3 M_{\gamma\varepsilon}^e \rho_\gamma C_\varepsilon \quad (7)$$

4. 境界要素法(BEM)による定式化 Ω_1 , Ω_3 領域内では濃度が一定であるからラプラス方程式で表される浸透流方程式(8)のみを取り扱えばよい。また重み関数 v^* に式(9)の基本解を用いる。

$$k \Delta H = 0 \quad (8), \quad v^* = \frac{-1}{2\pi} \ln r \quad (9)$$

領域 Ω_1 について式(8)を展開すれば式(10)となる。

$$c(P)H(P) + \int_{\partial\Omega_1} H \frac{\partial v^*}{\partial n} d\Gamma = -\frac{1}{k} \int_{\partial\Omega_1} v_n v^* d\Gamma - \int_{\partial\Omega_1} n_y v^* d\Gamma \quad (10)$$

線形境界要素を用いて式(10)を離散化し整理すれば式(11)を得る。

$$\sum_{j=1}^{N_1} \tilde{H}_{ij}^{(1)} H_j = -\frac{1}{k} \sum_{j=1}^{N_1} G_{ij}^{(1)} (v_n)_j - a_i^{(1)}, \quad i = 1, 2, \dots, N_1 \quad (11)$$

同様に領域 Ω_3 についても式(12),(13)を求めることが出来る。

$$c(P)H(P) + \int_{\partial\Omega_3} H \frac{\partial v^*}{\partial n} d\Gamma = -\frac{1}{k} \int_{\partial\Omega_3} v_n v^* d\Gamma - (1+\beta) \int_{\partial\Omega_3} n_y v^* d\Gamma \quad (12)$$

$$\sum_{j=1}^{N_3} \tilde{H}_{ij}^{(3)} H_j = -\frac{1}{k} \sum_{j=1}^{N_3} G_{ij}^{(3)} (v_n)_j - a_i^{(3)}, \quad i = 1, 2, \dots, N_2 \quad (13)$$

ここに、 $\tilde{H}_{ij}$ はBrebbiaのHマトリックス、 n は境界に直角な単位法線であり、 N_1, N_2, N_3 はそれぞれ領域 $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ の要素数である。

5. 結合手法 図-2に示すように Γ_{12}, Γ_{23} はそれぞれ領域 Ω_1, Ω_2 間および Ω_2, Ω_3 間の内部境界である。この Γ_{12}, Γ_{23} に沿った v_n を等しいとおくことにより式(6), (11), (12)を結合することが出来る。 Γ_{12} による結合を例示しよう。図-3のように Γ_{12}^e をFEMの小三角形要素の一部およびBEMの内部境界要素の一部と考えれば式(6)は式(14)と示され、式(10)は式(15)と記述できる。

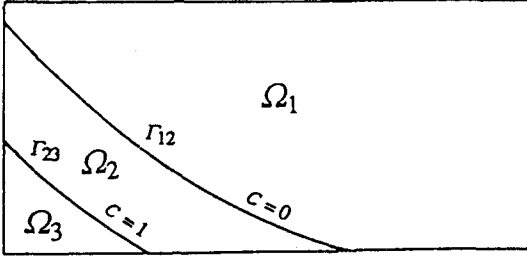


図-2 部分領域と内部境界

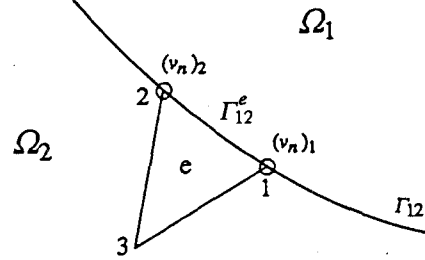


図-3 Γ_{12} における結合の概念

$$\sum_{\beta=1}^3 k \overline{\rho}_e K_{\alpha\beta}^e H_{\beta} = - \int_{\Gamma_{12}^e} N_{\alpha} \rho_f v_n d\Gamma - \frac{c_{\alpha}}{2\Delta^e} \frac{k}{\rho_f} \sum_{\gamma=1}^3 \sum_{\varepsilon=1}^3 M_{\gamma\varepsilon}^e \rho_{\gamma} \rho_{\varepsilon} \quad (14)$$

$$[D^{(2)}(\rho)] \{H^{(2)}\} = -[N^{(2)}] \{v_n^{(2)}\} - \{f^{(2)}(\rho)\} \quad (15)$$

上式(15)の右辺第一項は次式のように示される。

$$[N^{(2)}] \{v_n^{(2)}\} = [N^{(12)} \quad N^{(23)} \quad N^{(22)}] \begin{Bmatrix} v_n^{(12)} \\ v_n^{(23)} \\ \hat{v}_n^{(22)} \end{Bmatrix} = [N^{(12)}] \{v_n^{(12)}\} + [N^{(23)}] \{v_n^{(23)}\} + [N^{(22)}] \{\hat{v}_n^{(22)}\} \quad (16)$$

一方、式(11), (13)は、次式のように整理される。

$$\{v_n^{(12)}\} = k [J^{(12)}] \{H^{(1)}\} + \{a^{(12)}\} \quad (17) \quad \{v_n^{(23)}\} = k [J^{(23)}] \{H^{(3)}\} + \{a^{(23)}\} \quad (18)$$

これらを代入すれば、式(16)は次式(19)と記述できる。

$$\begin{aligned} [N^{(2)}] \{v_n^{(2)}\} &= k [N^{(12)}] [J^{(12)}] \{H^{(1)}\} + k [N^{(23)}] [J^{(23)}] \{H^{(3)}\} \\ &\quad + [N^{(22)}] \{\hat{v}_n^{(22)}\} + [N^{(12)}] \{a^{(12)}\} + [N^{(23)}] \{a^{(23)}\} \\ &= [M^{(1)}] \{H^{(1)}\} + [M^{(3)}] \{H^{(3)}\} + \{g^{(2)}\} + \{b^{(1)}\} + \{b^{(3)}\} \end{aligned} \quad (19)$$

これを式(15)に用いれば目的とする結合解法を次式(20)で表わすことが出来る。

$$[M^{(1)}] \{H^{(1)}\} + [M^{(2)}(\rho)] \{H^{(2)}\} + [M^{(3)}] \{H^{(3)}\} = -(\{f^{(2)}(\rho)\} + \{g^{(2)}\} + \{b^{(1)}\} + \{b^{(3)}\}) \quad (20)$$

6. まとめ 図-4のように部分領域 S_1, S_2 に分割した本法の解析例を図-5に示す。全解析領域をBEMのみで解析した場合に比べ、解析結果はほぼ同様でありCPU時間は約1/24に節約できる。

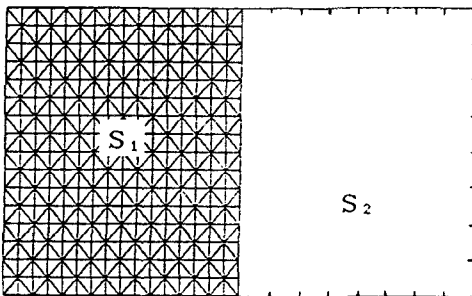


図-4 領域分割例

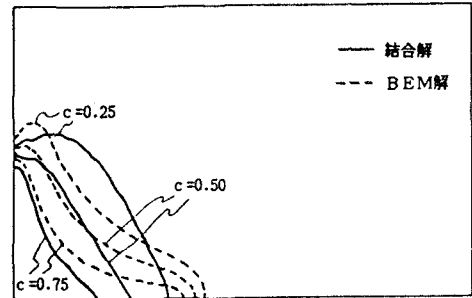


図-5 結合解とBEM解の比較

参考文献 1) 加納, 黒木, 赤坂, 樋口: 境界要素法による地下塩水くさびの移流拡散解析, S63年度西部支部年講