領域分割型重み付差分法による地下塩水くさび解析

九州産業大学　正員○加納正道
九州産業大学　正員　赤坂順三
東　和　大学　正員　空閑幸雄

1．まえがき　筆者らは前報等[1),2)]において、被圧滞水層内における塩水くさび解析を重み付差分法で精度よく解けることを述べてきた。しかし、塩水くさび近傍を精度よく解くには、メッシュ幅を小さくしなければならないし、一方メッシュ幅を小さくすれば、計算に必要な配列は多大となり、計算時間も増大する。この解決策として、図１に示すように、解析領域をサブリージョン（部分領域）分割型メッシュで解く手法を提案する。本報は、浸透流方程式と移流拡散方程式を解くためのサブリージョン分割型重み付差分法の定め方を述べたものである。

2．基礎方程式　被圧滞水層内の塩水くさびの浸透流と拡散について、基礎式を考えれば、式(1)、式(2)のように示すことができる。

浸透流方程式：
$$k_1\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+k_2\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_2\frac{\rho}{\rho_f}\right)=0 \qquad (1)$$

移流拡散方程式：
$$\frac{\partial c}{\partial t}=d_1\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}+d_2\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}-u_1\frac{\partial c}{\partial x}-u_2\frac{\partial c}{\partial y} \qquad (2)$$

ここに、k_1, k_2：透水係数、H：圧力水頭、ρ：流体の密度、ρ_s：塩水の密度、ρ_f：淡水の密度、c：塩分濃度、u_1，u_2：x，y方向の実流速、d_1，d_2：x，y方向の拡散係数である。なお、密度ρと濃度cとの関係は、式(3)である。
$$\rho=\rho_f+(\rho_s-\rho_f)\cdot c \qquad (3)$$

3．浸透流方程式のサブリージョン分割型重み付差分法　これまで図１の解析領域全体を浸透流方程式(1)の重み付差分法で解析してきた。しかし、図１の Ω_1 Ω_3 の部分においては濃度が一定と考えられるので（c＝1 又は c＝0）、密度ρは式(3)より一定となり（$\rho=\rho_s$ 又は $\rho=\rho_f$）、式(4)の非同次項はゼロ値となる。ここで、簡単のため等方性（$k_1=k_2=k$）を考えれば、浸透流方程式(1)はＬａｐｌａｃｅ方程式(5)となって、これを重み付差分法で解けばよいことになる。基礎式(1),(5)の正方メッシュの場合の重み付差分法の定め方については、前報[1)]と同様である。

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(k_2\frac{\rho}{\rho_f}\right)=f \qquad (4)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}=0 \qquad (5)$$

なお、メッシュ幅の異なる境界上におけるサブリージョン分割型重み付差分法が必要になるのでこれの定め方について述べる。いま、Ω_1 Ω_2 の境界附近では濃度による密度の変化が小さいものと考え、Ｌａｐｌａｃｅ方程式(5)で解くことにする。基礎式(5)を満足するx、yの多項式をx、yの 0,1,2..rで記せば式(6)が得られる。ここで、x、yの増分をそれぞれ$\Delta x=\Delta y=h$として原点のごく近くを考え、$\Delta x=p_1 h$，$\Delta y=p_2 h$ と離散化

$$H^{(r)}(x,y)=\sum_{i=0}^{r/2}(-1)^i\left[\frac{(x^2-y^2)^{r-2i}}{(r-i)!}\cdot\frac{(x^2y^2)^i}{i!}\cdot b_{ri}\right] \qquad (6)$$

（b_{ri}はrとiにより、定まる定数）

$$H(i,g)=a_1H(i-1,g+1)+a_2\{H(i-1,g-3)+H(i+3,g+1)\}+a_3H(i+3,g-3) \qquad (7)$$

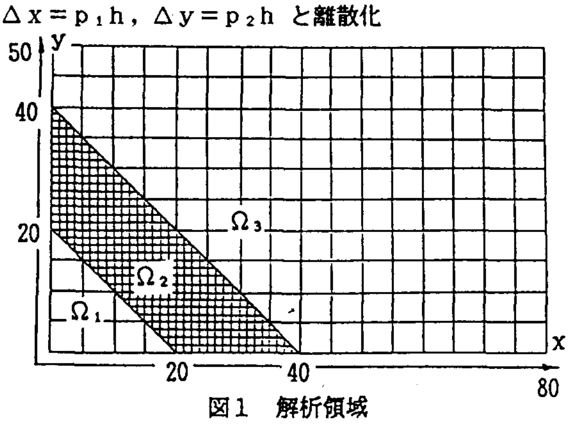


図１　解析領域

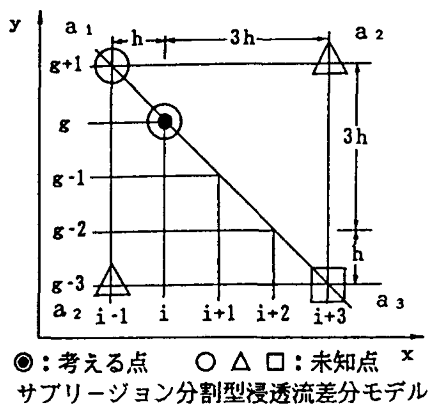


図２　サブリージョン分割型浸透流差分モデル

をほどこす。ここにp_1, p_2 は 0,±1,±2,±3 のような大きくない整数。図2に示す未知時間3種類4点における差分モデルを考えると、重み付差分式(7)が得られる。 そこで、原点を考える点に移し、式(6)において r=0,2,4 のときに得られる$H^{(r)}$の値を式(7)に代入すれば、重み a_1 ,a_2,a_3 を求める連立方程式(8)が得られる。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -h^4 & 14h^4 & -81h^4 \\ h^8 & -1054h^8 & 6561h^8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (8)$$

$$c^{(r)}(x,y,t)=\sum_{i=0}^{r/2}\left[\frac{(x-u_1t+y-u_2t)^{r-2i}}{(r-2i)!}\cdot\frac{\{(d_1+d_2)t\}^{i}}{i!}\right] \qquad (9)$$

$$c(i,g,j+1)=P_1c(i-1,g,j+1)+P_2c(i,g+1,j+1)+P_3c(i,g-4,j+1)+P_4c(i+4,g,j+1)+P_5c(i,g,j) \qquad (10)$$

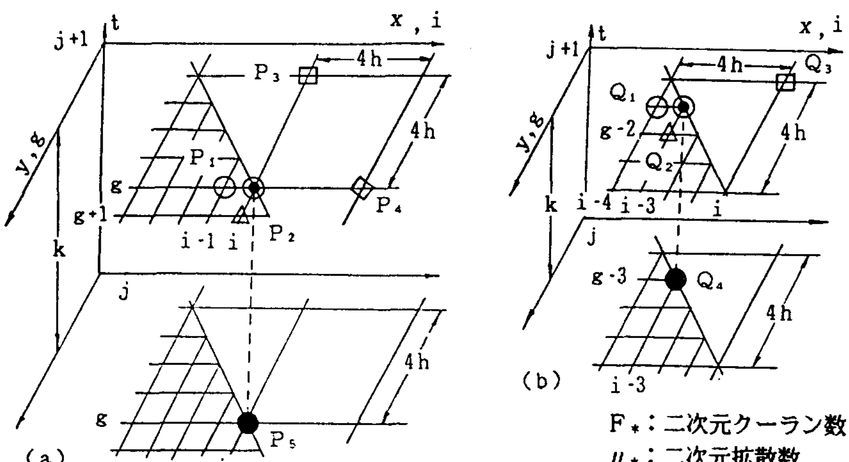
4．移流拡散方程式のサブリージョン分割型重み付差分法

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ (-1-F_*) & (1-F_*) & (-4-F_*) & (4-F_*) & 0 \\ (-1-F_*)^2+2\mu_* & (1-F_*)^2+2\mu_* & (-4-F_*)^2+2\mu_* & (4-F_*)^2+2\mu_* & 0 \\ (-1-F_*)^3+6(-1-F_*)\mu_* & (1-F_*)^3+6(1-F_*)\mu_* & (-4-F_*)^3+6(-4-F_*)\mu_* & (4-F_*)^3+6(4-F_*)\mu_* & 0 \\ (-1-F_*)^4+12\mu_*^2+12(-1-F_*)^2\mu_* & (1-F_*)^4+12\mu_*^2+12(1-F_*)^2\mu_* & (-4-F_*)^4+12\mu_*^2+12(-4-F_*)^2\mu_* & (4-F_*)^4+12\mu_*^2+12(4-F_*)^2\mu_* & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -F_* \\ F_*^2+2\mu_* \\ -F_*^3-6F_*\mu_* \\ F_*^4+12\mu_*^2+12F_*^2\mu_* \end{bmatrix} \qquad (11)$$

$$c(i,g,j+1)=Q_1c(i-1,g,j+1)+Q_2c(i,g+1,j+1)+Q_3(i+3,g-1,j+1)+Q_4c(i,g,j) \qquad (12)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ (-1-F_*) & (1-F_*) & (2-F_*) & 0 \\ (-1-F_*)^2+2\mu_* & (1-F_*)^2+2\mu_* & (2-F_*)^2+2\mu_* & 0 \\ (-1-F_*)^3+6(-1-F_*)\mu_* & (1-F_*)^3+6(1-F_*)\mu_* & (2-F_*)^3+6(2-F_*)\mu_* & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -F_* \\ F_*^2+2\mu_* \\ -F_*^3-6F_*\mu_* \end{bmatrix} \qquad (13)$$

低流速型差分モデルによる、メッシュ幅の異なる境界上における移流拡散方程式のサブリージョン分割型重み付差分法を以下のように考える。いま、図3（a）に示す未知点が(i,g)の場合の二次元差分モデルを考えると、重み付差分法は式(10)で表わされる。この重みP_1, P_2, P_3, P_4, P_5 を求めるには、まず、基礎式(2)を満足するx，y，tの多項式(9)を求め、浸透流同様離散化をほどこす。ここで考える点に原点を移し、式(9)において r=0,1,2,3,4 とおいて得られる$c^{(r)}$の値を式(10)に代入すれば連立方程式(11)が得られる。さらに、図3（b）に示す求める点が(i-3,g-3)の場合の二次元差分モデルを考えると、重み付差分法は、原点を求める点に移せば、式(12)で表わされることになる。ここでは、重みがQ_1, Q_2, Q_3, Q_4 の4種類であるから、前述同様の考えより式(9)において r=0,1,2,3とおいて得られる$c^{(r)}$の値を式(12)に代入して連立方程式(13)を得る。式(11),(13)の連立方程式を解けば重みP_1 ,P_2,P_3,P_4,P_5とQ_1,Q_2,Q_3,Q_4が得られ重み付差分式(10),(12)が定まる。



F_*：二次元クーラン数
μ_*：二次元拡散数

図3　サブリージョン分割型移流拡散差分モデル

参考文献

1）空閑・加納・赤坂：重み付差分法による塩水くさび拡散解析、第42回年講第2部

2）加納・赤坂・空閑：重み付差分法による塩水くさび浸透流解析、昭和63年度西部支部年講