

三角形断面水路における流下方向密度勾配をもつ流れ

長崎大学工学部 正員 ○古本 勝弘・ 学生員 岩田 学

1. まえがき

河川感潮域には塩分の侵入があり、流れ方向に密度勾配をもつ流れが形成されている。この流れが横断方向に一様でない速度分布をもつならば、横断方向にも密度勾配が生じ、断面内に重力循環流が誘起される。2次元解析では縦方向密度効果が分散係数を一方的に増大させるが、この2次元流は、断面内の混合効果をもたらすので、分散係数を減少させる効果をもつ筈である。本報告では解析を容易にするために、水深に比して幅が大きい偏平な三角形水路を対象として、摂動法で流速分布、密度分布を求めたものを示している。

2. 流れのモデルと基礎式

図-1に示すような中央水深 H 、幅 $2B(B/H=\beta \gg 1)$ の三角形断面一様水路の、 x -方向に密度勾配が直線的な等流を考える。断面平均流速 $\bar{U}$ とともに移動する座標 $x_1 = x - \bar{U}t$ に対して密度は定常に保たれるものとして、

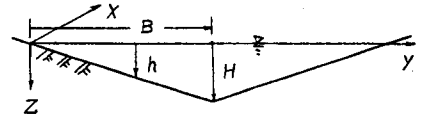


図-1

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 (1 + \nu (x_1/H + \theta(y, z))) \quad (1)$$

とおく。 $B \gg H$ の水路を考えているので w は小さく、静水圧分布を仮定できるものとする。基礎式は、 x - y -方向の運動方程式、密度保存式および連続の式で、それぞれ無次元化された②～⑤式によって表される。

$$\frac{\tilde{v}}{\beta} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} + \frac{\tilde{w}}{h} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \zeta} = 1 - 2\tilde{h}\tilde{\zeta} + \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\tilde{\epsilon}_1 \tilde{h}^{\frac{3}{2}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}) + \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial \zeta} (\tilde{\epsilon}_5 \tilde{h}^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \zeta}) \quad (2)$$

$$\frac{\tilde{v}}{\beta} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta} + \frac{\tilde{w}}{h} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \zeta} = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{p}{\rho U_*^2} \right) + \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\tilde{\epsilon}_1 \tilde{h}^{\frac{3}{2}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta}) + \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial \zeta} (\tilde{\epsilon}_5 \tilde{h}^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \zeta}) \quad (3)$$

$$(\tilde{u} - \bar{U}) + \frac{\tilde{v}}{\beta} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \frac{\tilde{w}}{h} \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\tilde{\epsilon}_1 \tilde{h}^{\frac{3}{2}} \frac{\partial \theta}{\partial \eta}) + \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial \zeta} (\tilde{\epsilon}_5 \tilde{h}^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \theta}{\partial \zeta}) \quad (4)$$

$$\frac{1}{\beta} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta} + \frac{1}{h} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \zeta} = 0 \quad (5) \quad \sigma = \frac{1}{2} \frac{\langle \rho \rangle \nu g H}{\rho_0 U_*^2} = \frac{1}{2} \frac{\langle \rho \rangle \nu g h}{\rho_0 u_*^2} \quad (6)$$

ここに、 $\tilde{u} = u/U_*$ 、 $\tilde{v} = v/U_*$ 、 $\tilde{w} = w/U_*$ 、 $\eta = y/B$ 、 $\zeta = z/h$ 、 $\tilde{h} = h/H$ 、 $\tilde{\epsilon} = \epsilon/hu_*$ 、 $\tilde{e} = e/hu_*$ であり、摩擦速度を $U_* = \sqrt{gHI}$ 、 $u_* = \sqrt{g h I}$ 、縦方向水路勾配を I としている。⑥式の σ は密度効果を示すパラメータとして重要で、物理的意味は水路床における密度勾配による応力と水面勾配による応力との比である。位置 y における渦動粘性係数 ϵ と渦拡散係数 e は深さ方向には一定、すなわち $\tilde{\epsilon}_1$ 、 $\tilde{e}_1$ を定数とし、更に均一流においては方向によらないとして $\tilde{\epsilon}_1 = \tilde{\epsilon}_2 = \tilde{\epsilon}_3 = \tilde{\epsilon}_0$ とする。また、成層流については鉛直方向成分のみが影響を受け、次のように表す。

$$\tilde{\epsilon}_2 = \tilde{\epsilon}_0 + \tilde{\epsilon}_1 \sigma, \quad \tilde{e}_2 = \tilde{e}_0 + \tilde{e}_1 \sigma \quad (7)$$

流れの境界条件は水路床において slip velocity を許容して、次のように置く。 x_b については文献1) 参照。

$$\text{水面: } \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \zeta} = 0, \quad \tilde{w} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} = 0 \quad \text{底面: } \tilde{u} = \chi_b \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \zeta}, \quad \tilde{v} = \chi_b \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \zeta}, \quad \tilde{w} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} = 0 \quad (8)$$

3. 摂動法による解析

密度勾配が比較的小さい流れを対象として、 σ をパラメータに摂動展開の形で表し、未知量を次のようにおく。

$$\tilde{u} = \tilde{u}_0 + \sigma \tilde{u}_1 + \dots, \quad \tilde{v} = 0 + \sigma \tilde{v}_1 + \dots, \quad \tilde{w} = 0 + \sigma \tilde{w}_1 + \dots, \quad \theta = \theta_0 + \sigma \theta_1 + \dots, \quad p = p_0 + \sigma p_1 + \dots \quad (9)$$

⑨を②～⑤に代入し、 σ の各オーダーごとに整理すると、三角形断面では $\tilde{h} = \eta$ とおけるので、

$$0\text{次: } \frac{\tilde{\epsilon}_0}{\beta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta^{\frac{3}{2}} \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial \eta}) + \frac{\tilde{\epsilon}_0}{\sqrt{\eta}} \frac{\partial^2 \tilde{u}_0}{\partial \zeta^2} = -1 \quad (10) \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{p_0}{\rho_0 U_*^2} \right) = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\tilde{\epsilon}_0}{\beta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta^{\frac{3}{2}} \frac{\partial \theta_0}{\partial \eta}) + \frac{\tilde{\epsilon}_0}{\sqrt{\eta}} \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial \zeta^2} = \tilde{u}_0 - \bar{U}_0 \quad (12)$$

$$1次: \frac{\bar{\varepsilon}_0}{\beta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \eta} \right) - \frac{\bar{\varepsilon}_0}{\eta} \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial \zeta^2} = 2\eta\zeta - \frac{\bar{\varepsilon}_1}{\eta} \frac{\partial^2 \tilde{u}_0}{\partial \zeta^2} + \frac{\tilde{v}_1}{\beta} \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial \eta} + \frac{\tilde{w}_1}{\eta} \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial \zeta} \quad (13) \quad \frac{1}{\beta} \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial \eta} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial \zeta} = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\bar{\varepsilon}_0}{\beta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial \eta} \right) + \frac{\bar{\varepsilon}_1}{\eta} \frac{\partial^2 \tilde{v}_1}{\partial \zeta^2} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{p_1}{\rho_0 U_*^2} \right) \quad (14) \quad \frac{\bar{\varepsilon}_0}{\beta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \theta_1}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{\eta} \left(\bar{\varepsilon}_0 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \zeta^2} + \bar{\varepsilon}_1 \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial \zeta^2} \right) = (\tilde{u}_1 - \tilde{u}_0) + \frac{\tilde{v}_1}{\beta} \frac{\partial \theta_0}{\partial \eta} + \frac{\tilde{w}_1}{\eta} \frac{\partial \theta_0}{\partial \zeta} \quad (16)$$

ここに、 $\tilde{u}_0, \tilde{u}_1$ は $\tilde{u}, \tilde{u}_1$ の全断面平均である。①式と静水圧分布の仮定から $(p_1/\rho_0 U_*^2) = 2\eta \int_{\zeta_0}^{\zeta} \bar{\varepsilon}_0 d\zeta$ ⑪と表され、④式右边は θ_0 で与えられる。解析手順は、⑩により $\tilde{u}_0$ を、⑫により θ_0 を、⑬により $\tilde{v}_1$ を、⑭により $\tilde{w}_1$ を、⑮により $\tilde{u}_1$ を、⑯により θ_1 をそれぞれ順を追って求めることができる。ただし、全ての項を入れた解は複雑であるので項の採否は適宜行う必要がある。まず、⑩においては $B \gg H$ から x -方向物体力は τ_{zx} に主として釣り合うとして、左辺第1項を省略して $\tilde{u}_0$ を求め、これを全断面で積分して $\tilde{U}_0$ を得る。

$$\tilde{U}_0 = (\sqrt{\eta/\bar{\varepsilon}_0})(1/2 - \chi_b - \zeta^2/2) \quad (17) \quad \tilde{U}_0 = (4/5\bar{\varepsilon}_0)(1/3 - \chi_b) \quad (19)$$

密度分布 θ_0 を $\theta_{00}(\eta) + \theta_{01}(\eta, \zeta)$ とおき、鉛直平均流速 $\int_0^1 (\tilde{u}_0 - \tilde{U}_0) d\zeta$ によって横断方向密度分布 $\theta_{00}(\eta)$ が、それからの偏差流速により θ_{01} が形成されると考えて、⑫を解き次式を得る。

$$\theta_0 = \frac{\beta^2}{\bar{\varepsilon}_0 \bar{\varepsilon}_0} \left\{ \frac{2}{3} (\eta - \frac{2}{3}) - \frac{8}{5} (\eta^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{5}) (\frac{1}{3} - \chi_b) \right\} - \frac{7}{2\bar{\varepsilon}_0} \left(\frac{\zeta^4}{24} - \frac{\zeta^2}{12} + \frac{7}{360} \right) \quad (20)$$

$\tilde{v}_1$ については、 $\tilde{u}_0$ と同様の考えで、④の左辺第1項を省略し、境界条件⑧とともに、 η 方向水面勾配 $\partial \varepsilon_0 / \partial \eta$ を $\int_0^1 \tilde{v}_1 d\zeta = 0$ の条件で消去して、⑫を得る。 $\tilde{w}_1$ は⑮を解いて⑫を得る。

$$\tilde{v}_1 = \frac{\beta}{\bar{\varepsilon}_0 \bar{\varepsilon}_0} \left\{ \frac{2}{3} \eta^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{5} \eta \right\} \left\{ \left(\frac{\zeta^3}{3} + \chi_b - \frac{1}{3} \right) (\frac{1}{3} - \chi_b) - \left(\frac{\zeta^2}{2} + \chi_b - \frac{1}{2} \right) (\frac{1}{4} - \chi_b) \right\} \quad (21)$$

$$\tilde{w}_1 = \frac{-1}{\bar{\varepsilon}_0 \bar{\varepsilon}_0} (\eta^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{5} \eta) \left\{ \left(\frac{\zeta^4}{12} + \zeta (\chi_b - \frac{1}{3}) \right) (\frac{1}{3} - \chi_b) - \left(\frac{\zeta^3}{6} + \zeta (\chi_b - \frac{1}{2}) \right) (\frac{1}{4} - \chi_b) \right\} \quad (22)$$

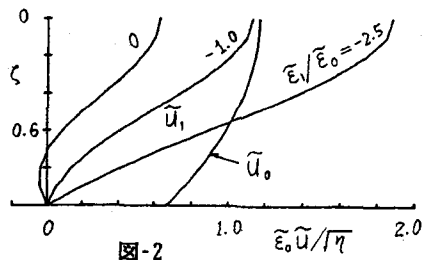


図-2

$\tilde{u}_1$ を求めるための境界条件を、水底で $\tilde{u}_1 = 0$ 、水面で $\partial \tilde{u}_1 / \partial \zeta = 0$ とし、 $\tilde{u}_0$ と同様に、⑬の左辺第1項を省略して求める。 θ_1 についても θ_0 と同様に $\theta_{00}(\eta) + \theta_{01}(\eta, \zeta)$ とおき、近似的に⑯式右边の鉛直平均により θ_{00} が、それからの偏差により θ_{01} が決められるとして、 θ_1 を求めた。 $\tilde{u}_1, \theta_1$ ともに非常に長い式となるのでここでは記さない。

4. 計算結果

以下に示す計算では $\chi_b = -2/3$, $\bar{\varepsilon}_0 = \bar{\varepsilon}_0 = 0.2$ とおいた。 $\tilde{u}_0, \tilde{u}_1$ の鉛直分布を図-2に示す。 $\tilde{u}_1$ は $\eta = 0.75$ における分布で、 $\bar{\varepsilon}_1 / \bar{\varepsilon}_0$ の値により大きく影響される。2次元成層流実験ではほぼ $\bar{\varepsilon}_1 = -2.5\bar{\varepsilon}_0$ で表される。²⁾ 図-3に $\tilde{v}_1, \tilde{w}_1$ の分布を示す。断面内の循環流の様子が窺える。図-4は $\tilde{u}_1$ の鉛直線平均の横断分布(偏差)を、図-5は θ_0, θ_1 の同じく横断分布をそれぞれ示す。これらによると、断面内循環流が流速・密度をともに横断方向に平均化させる方向にあり、分散係数 D が $(\tilde{u} - \tilde{U}) \cdot \theta$ の断面積分で表されることを考えると、循環流が D を減少させることが解る。ただし、 x -方向の流速・密度の鉛直方向分布は、成層流効果で流れの方向に引き伸ばされるので、分散係数は大きくなる。 σ に対する両効果の大小関係により分散係数は大きく影響されるが、これを定量的に評価するためには、成層流における渦動粘性係数や渦拡散係数を正確に見積ることが必要である。

(参考文献) 1) 山坂他: 土木学会論文集, 第411号/II-12, P.99-108 2) 古本他: 第31回水講論文集, p.461-466

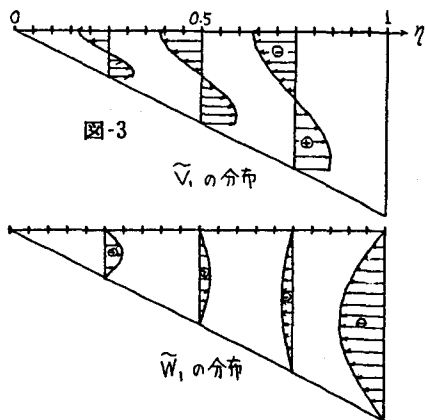


図-3

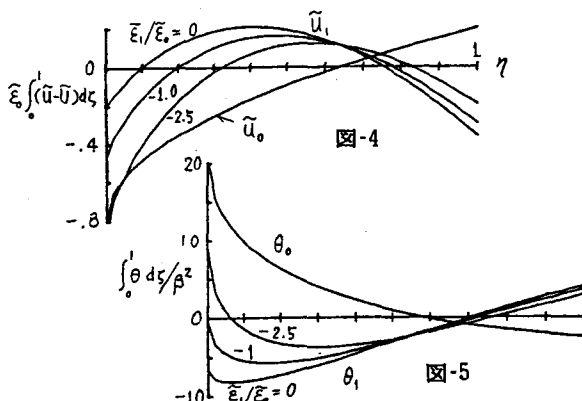


図-4

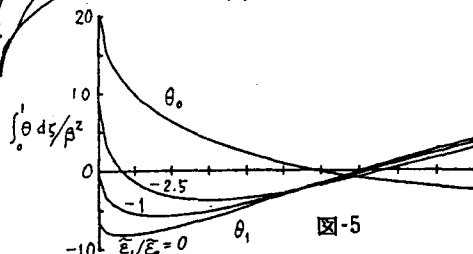


図-5