確率特性を有する構造物の動的応答解析法

宮崎大学大学院　学生会員　江藤　祐昭
宮崎大学工学部　正 会 員　原田　隆典

1．まえがき　確率有限要素法による静的問題ではいわゆる摂動法によって良い近似解が得られるが、動的問題においてはまだ難点が残されている。そこで、本研究では主に動的問題を取り扱うための新しい方法を提案し、1，2自由度振動系においてモンテカルロ法や摂動法による結果と比較・検討する。

2．摂動法　平均値が0の確率変数 a の関数である動的係数マトリックス $D(a)$ および外力 $F(a)$ をもつ線形連立1次方程式を考える。

$$D(a)\cdot X(a)=F(a) \tag{1}$$

$a=0$ の場合は確定的な係数を持つ線形連立1次方程式となる。$D(a),X(a),F(a)$ を $a=0$ の周りにテイラー展開すると、式(1)の解 $X(a)$ の平均値と共分散は良く知られているように次のように与えられる。

$$E[X]=X^0,\ Cov[X,X^{*T}]=\sum_i\sum_j (X_i^I)^{*T}X_j^I E[a_ia_j] \tag{2}$$

ここに、$*$は共役複素数、Tは転置を意味する。また、

$$X^0=(D^0)^{-1}F^0,\ X_i^I=(D^0)^{-1}\left(\frac{\partial F}{\partial a_i}|_{a=0}-\frac{\partial D}{\partial a_i}|_{a=0}X^0\right) \tag{3}$$

であり、$F(a)=F$の場合には、式(3)で$\dfrac{\partial F}{\partial a}=0$とする。

3．繰り返し平均法[1]　ここでは、簡単のために $F(a)=F$の場合について示す。そして、$D(a)$ を次のように、その大きさにより3つの部分に分ける。

$$D(a)=D^0+D^I(a)+D^{II}(a),\ D^0>D^I(a)>D^{II}(a) \tag{4}$$

もし、$D(a)$ が摂動法のときのように a のまわりにテイラー展開して

$$D^0=D^0,\ D^I(a)=\sum_i D_i^I a_i,\ D^{II}(a)=0,\ D_i^I=\frac{\partial D(a)}{\partial a_i}|_{a=0} \tag{6}$$

である場合には、Xの平均値および共分散は次のように与えることができる。

$$E[X]=M^{-1}F,\ Cov[X,X^{*T}]=(AE[X])(AE[X])^{*T}+\sum_i\sum_j(B_iE[X])(B_jE[X])^{*T}E[a_ia_j] \tag{7}$$

ここに、

$$M\equiv D^0-\sum_i\sum_j D_i^I(D^0)^{-1}D_jE[a_ia_j] \tag{8a}$$

$$\Delta T\equiv A-\sum_i B_ia_i+\sum_i\sum_j C_{ij}a_ia_j \tag{8b}$$

$$A\equiv M^{-1}(G+GM^{-1}G) \tag{8c}$$

$$B_i\equiv M^{-1}(D_i^I+D_i^IM^{-1}G+GM^{-1}D_i^I) \tag{8d}$$

$$G\equiv -\sum_i\sum_j D_i^I(D^0)^{-1}D_j^IE[a_ia_j] \tag{8e}$$

4．1，2自由度振動系における数値計算例　減衰定数のばらつきに対する応答のばらつきはあまり大きくないため、ここでは固有振動数のばらつきのみを検討する。したがって、1自由度振動系での $D(a)$ は、

$$D(a)=-\omega^2+i2h_0\omega_0(1+a)\omega+\omega_0^2(1+a)^2 \tag{9a}$$

そして、2自由度振動系では、

$$D(a_1, a_2) = \begin{bmatrix} -m_1\omega^2 + ic_1\omega + k_1(1+a_1) & -ic_1\omega - k_1(1+a_1) \\ -ic_1\omega - k_1(1+a_1) & -m_2\omega^2 + i(c_1+c_2)\omega + k_1(1+a_1) + k_2(1+a_2) \end{bmatrix} \tag{9b}$$

ここに、a, a_1, a_2は平均値が0、分散がそれぞれ$\sigma_{aa}^2, \sigma_{a_1}^2, \sigma_{a_2}^2$の確率変数とする。また、係数の値として次のようなものが入る。

$$\left.\begin{array}{lll} m_1 = 0.1, & m_2 = 0.1 & [t \cdot s^2/cm] \\ k_1 = 30, & k_2 = 20 & [t/cm] \\ c_1 = 0.265, & c_2 = 0.058 & [t \cdot s/cm] \end{array}\right\} \tag{10}$$

数値計算結果は、応答 X の平均値の絶対値 $|E[X]|$(伝達関数の平均値) と標準偏差$\sqrt{Cov[X, X^{*T}]}$である。下図は、1自由度振動系において確率変数の標準偏差を5%とし、減衰定数を変化させたときのモンテカルロ法、摂動法、それに繰り返し平均法での結果を示したものである。

5. まとめ　数値計算例では、1自由度振動系を示したが、繰り返し平均法は摂動法に比べ良い近似を与えている。そして、固有振動数におけるばらつきの標準偏差と減衰定数の比σ_{aa}/h_0は重要なパラメーターで、その比が小さくなるに従って3法による解析値が接近してくることがわかる。

参考文献　(1). 江藤・原田　"確率特性を有する構造物の動的応答解析法に関する基礎的研究"　第44回土木学会全国大会 I，1989