不規則外力を受けるはりにおける最適動吸振器の設計

長崎大学工学部　学生員○松永鉄治　長崎大学工学部　正員　岡林 隆敏
長崎大学工学部　学生員　奥松俊博　長崎大学工学部　正員　小西 保則

1．はじめに

構造物の振動を軽減する技術として、動吸振器が知られている。動吸振器の設計の理論[1]は、早くから確立しているが、外力として調和振動を対象としたものである。しかし、実際の土木・建築構造物に作用する外力は、不規則な外力が多く、従来の動吸振器の理論を適用することはできない。

本論文は、任意の自己相関関数を有する不規則外力が作用する構造系の、応答の分散を最小にする動吸振器の最適パラメータを決定する手法を提案する。最適化手法[2]には、DFP(Davidon-Flecher-Powell)法を適用した。数値解析では、外力が白色雑音過程と狭帯域過程について考え、構造系と動吸振器の重量比および外力のパワースペクトル密度が、最適動吸振器のパラメータに及ぼす影響を検討した。

2．不規則外力を受ける構造－動吸振器と荷重系の方程式

モード解析法により、x点のはりの変位は、次式で与えられる。

$$y(x,t)=\sum_{i=1}^{n}\phi_i(x)\,q_i(t) \qquad \text{--------(1)}$$

ここに、$\phi_i(x)$：i次振動モード、$q_i(t)$：i次規準座標である。x＝b点に不規則外力f(t)が作用し、$x=a_K$点にm個の動吸振器を取付けたはりの方程式は、次式で表すことができる。

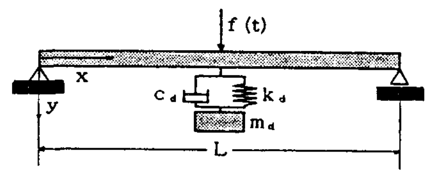

図-1 構造－動吸振器系

$$\ddot{q}_i(t)+2h_i\omega_i\dot{q}_i(t)+\omega_i^2 q_i(t)=-\sum_{k=1}^{m}\frac{m_k}{M_i}\ddot{Z}_k(t)\,\delta(x-x_k)+\frac{1}{M_i}f(t)\,\delta(x-b) \qquad \text{--------(2)}$$

$$\ddot{d}_k(t)+2h_{dk}\omega_{dk}(\dot{d}_k(t)-\dot{y}(a_k,t))+\omega_{dk}^2(d_k(t)-y(a_k,t))=0 \qquad \text{--------(3)}$$

ここに、$d_k(t)$：動吸振器の変位、ω_i、ω_{dk}：はりと動吸振器の固有振動数、h_i、h_{di}、：はりと動吸振器の減衰定数、M_i：はりのi次の有効質量。

任意の相関を有する不規則外力は、白色雑音過程を入力とする構造系により表現することができる。

$$\left.\begin{aligned} f(t)&=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}(t)\\ \dot{\boldsymbol{Z}}(t)&=\boldsymbol{A}_Z\boldsymbol{Z}(t)+\boldsymbol{N}_Z(t)\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

ここに、$\boldsymbol{N}_Z(t)$は平均値0の白色雑音過程である。

3．系の状態空間表示と共分散方程式

構造系と動吸振器の変数を、状態変数表示する。

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{q}(t)&=[q_1\dot{q}_1\cdots q_n\dot{q}_n]^T\\ \boldsymbol{d}(t)&=[d_1\dot{d}_1\cdots d_n\dot{d}_n]^T\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

ここで、構造－動吸振器－荷重系を合成した変数

$$\boldsymbol{X}(t)=[\boldsymbol{q}(t)^T\ \boldsymbol{d}(t)^T\ \boldsymbol{Z}(t)^T]^T \qquad (6)$$

で表すと、(3)(4)(5)式より系は、次の伊藤方程式で表現される。

$$d\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{A}_X\boldsymbol{X}(t)dt+d\boldsymbol{W}_X(t) \qquad (7)$$

ここに、$\boldsymbol{W}_X(t)$は平均値)0のWineaの過程であり、

$$E[d\boldsymbol{W}_X(t)\,d\boldsymbol{W}_X^T(t)]=\boldsymbol{Q}_X dt \qquad (8)$$

となる。

$\boldsymbol{X}(t)$の共分散を$\boldsymbol{R}_X(t)=E[\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}(t)^T]$　で表すと、共分散の時間的変化は、共分散方程式

$$\dot{\boldsymbol{R}}_X(t)=\boldsymbol{A}_X\boldsymbol{R}_X(t)+\boldsymbol{R}_X(t)\boldsymbol{A}_X^T+\boldsymbol{Q}_X \qquad (9)$$

であたえられる。$t\to\infty$における定常状態では、(9)式の解は、

$$\boldsymbol{A}_X\boldsymbol{R}_X(t)+\boldsymbol{R}_X(t)\boldsymbol{A}_X^T+\boldsymbol{Q}_X=0 \qquad (10)$$

より求められる。構造系の応答の分散は、$\boldsymbol{R}_X$の要素として得られる。本研究では、非定常応答の最大値の推定量として、定常応答を考えている。

4．最適問題への定式化

不規則外力が作用するはりにおいて、動吸振器のパラメータ、振動数、減衰定数、重量、設定位置等βをパラメータにして、変位応答の分散σ_y^2を最小

にするβを求める。本研究では、これを制約条件のない非線形計画問題に定式化する。最適手法には、ＤＦＰ(Davidon-Flecher-Powell)法を用いた。

ｋ回目の探索により求められるパラメータをβ^kとする。

$\sigma_y^2(\beta^k)$と$\partial(\sigma_y^2(\beta^k))/\partial\beta^k$を次式で求める。

$$A_X(\beta^k)R_X^k+R_X^k A_X(\beta^k)+Q_X(\beta^k)=0 \qquad (11)$$

$$A_X(\beta^k)\left(\frac{\partial}{\partial\beta_s^k}R_X\right)+\left(\frac{\partial}{\partial\beta_s^k}R_X\right)A_X(\beta^k)$$
$$=-\frac{\partial}{\partial\beta_s^k}A_X(\beta^k)R_X-R_X\frac{\partial}{\partial\beta_s^k}A_X^T(\beta^k) \qquad \cdots\cdots\cdots(12)$$

探索方向を次式で求める。

$$g^k=\nabla\sigma_y^2(\beta^k),\quad e^k=-H^k g^k \qquad (13)$$

Ｈesse行列の更新式として、ＤＦＰ法を適用する。

$$\sigma_y^2(\alpha)=\sigma_y^2(\beta^k+\alpha e^k) \qquad (14)$$

が最小になるαの値を、３次補間多項式法で求める。このαを用いて、β^kを更新する。

$$\beta^{k+1}=\beta^k+\alpha e^k \qquad (15)$$

この操作を繰り返すことにより、

$$\sigma_y^2(\beta)\to\min \qquad (16)$$

となる動吸振器のパラメータβを決定する。

５．数値解析と考察

数値解析例では、図-1のようにはりに動吸振器が１個設置した場合を考える。外力としては、白色雑音過程と次式の

$$R(\tau)=\sigma^2\exp(-\beta|\tau|)\cos\Omega\tau \qquad (17)$$

ような自己相関関数を有する確率過程である。

図-2は、外力が白色雑音の場合の、最適パラメータの収束の様子である。N=8回で最適値が求まる。他の場合も、ほぼこの程度の繰り返しで収束した。図-3は構造系と動吸振器の重量比を変えて、動吸振器のパラメータを求めた。土木・建築構造物では、重量比は 1/100程度が通常考えられている。この結果は、従来の調和外力によるによる動吸振器の最適値と良く一致している。

土木・建築構造物には、様々なパワースペクトル密度を有する外力が作用する。そこで、(17)式のβを$\beta=h\Omega$として、ｈを変化させた場合のパワースペクトル密度である。図-5は、このような不規則外力が作用した場合、最適な動吸振器を設置したはりの応答を、重量比をパラメータに示したものである。応答は、支間中点の変位の標準偏差を動吸振器のない場合の同じ応答で、規準化している。

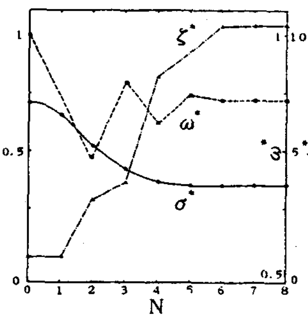

図-2 収束状況

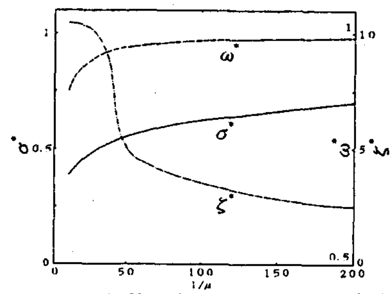

図-3 重量比によるパラメータの変化

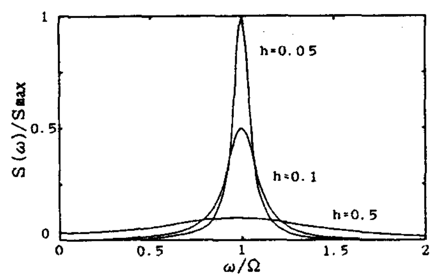

図-4 ｈによるパワースペクトル密度

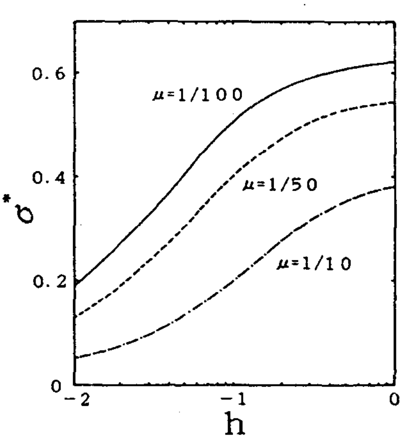

図-5 スペクトル密度による応答の変化

［参考文献］ (1)松平精：基礎振動学、現代工学社
(2)町田東一・他：FORTRAN応用数値計算、東海大学出版会