

熱勾配をもつ先端弾性支持変断面片持ちばりの動的安定性

長崎大学工学部 学生員 ○其田智洋

長崎大学工学部 正 員 高橋和雄

長崎大学工学部 正 員 小西保則

1. まえがき 柔軟宇宙構造のダイナミクスが最近議論されるようになってきている。柔軟なゆえに推進力などによってダイバージェンスやフラッターなどの動的不安定が起こるおそれがある。したがって、これらの構造物の動的安定性を把握しておくことが、制振対策を考えるうえで重要である。このような研究の第一歩として、本研究は、線形的な熱勾配をもつ先端でバネ支持された変断面片持ちばりの動的安定性¹⁾を文献2)で提案した方法を用いて詳しく解析するものである。数値計算において、系の固有振動および屈曲特性および、動的不安定領域を各種のパラメーターのもとに明らかにする。

2. 基礎式および解法 先端で周期的軸方向荷重 $P(t) = P_0 + P_1 \cos \omega t$ を受ける長さ方向に線形的に変化する長方形断面をもつ先端弾性支持の片持ちばりの一般図を図-1に示す。また、長さ方向に線形な温度勾配(定常温度分布)をもつ。はりの任意点のたわみ w 、ヤング率 $E(x)$ 、断面2次モーメントを $I(x)$ 、断面積 $A(x)$ 、密度 ρ とすれば、Bernoulli-Eulerばりの理論のもとづく運動方程式および境界条件は次のように与えられる¹⁾。

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} [E(x)I(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}] + P(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

$$w(0, t) = 0, \quad \frac{\partial w(0, t)}{\partial x} = 0, \quad [E(x)I(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}] \Big|_{x=L} = 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} [E(x)I(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}] + P(t) \frac{\partial w}{\partial x} - K_e w \right) \Big|_{x=L} = 0 \quad (2)$$

上式をはりの長さ L 、自由端の断面 (b_1, h_1) とヤング率 E_1 および横波の伝播速度 c を用いて無次元化すると、次式が得られる

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} [S(\xi)I(\xi) \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2}] + p(\tau) \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} + m(\xi) \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} = 0 \quad (3)$$

$$\text{ここに、} \xi = \frac{x}{L}, \quad \eta = \frac{w}{L}, \quad \tau = ct, \quad c^2 = \frac{E_1 I_1}{\rho A_1 L^4},$$

$$p(\tau) = \frac{P(t)L^2}{E_1 I_1}, \quad \alpha = \frac{P_0}{P^*}, \quad \beta = \frac{P_1}{P^*}, \quad p^* = \frac{P^* L^2}{E_1 I_1}, \quad \kappa_e = \frac{K_e L^3}{E_1 I_1},$$

$$S(\xi) = [1 + \alpha^*(1 - \xi)][1 + \beta^*(1 - \xi)]^3, \quad m(\xi) = [1 + \alpha^*(1 - \xi)][1 + \beta^*(1 - \xi)]$$

$$T(\xi) = [1 - \delta(1 - \xi)], \quad \alpha^*, \beta^* \text{は断面変化パラメーター、} \delta \text{は温度パラメーター}$$

式(3)の一般解を次のように仮定する。

$$\eta(\xi, \tau) = \sum_{r=1}^n f_r(\tau) \eta_r(\xi) \quad (4)$$

ここに、 $f_r(\tau)$ は未知の時間関数、 $\eta_r(\xi)$ は境界条件を満足する座標関数で $\beta = 0$ のときのはりの固有振動形を用いる。

$$\eta_r(\xi) = \sum_{j=1}^r a_j^r \{1 - \cos(2j-1)\pi\xi\} / 2 \quad \text{ここに、} a_j^r: \text{定数} \quad (5)$$

式(3)にGalerkin法を適用すると、式(3)は次のような時間に関する運動方程式に変換される。

$$[M]\{\ddot{f}(\tau)\} + ([K] - \alpha p^*[H] - \beta p^*[H]\cos\theta\tau)\{f(\tau)\} = \{0\} \quad (6)$$

$$\text{ここに、} \theta = \omega/c, \quad M_{ij} = \int_0^1 m(\xi) \eta_i(\xi) \eta_j(\xi) d\xi, \quad E_{ij} = \int_0^1 S(\xi) I(\xi) \eta_i''(\xi) \eta_j''(\xi) d\xi$$

$$H_{ij} = \int_0^1 \eta_i'(\xi) \eta_j'(\xi) d\xi, \quad R_{ij} = \eta_i(1) \eta_j(1), \quad [K] = [E] + \kappa_e [R]$$

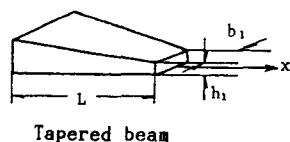
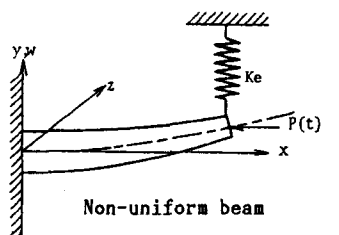


図-1 片持ちばりの一般形状

式(6)は連立のMathieuの方程式であり、 $\theta=2\omega_i/k$ ($k=1, 2, 3, \dots, n$) 付近の単純共振と $\theta=(\omega_i+\omega_j)/k$ 付近の結合共振は文献2)の方法を用いて得ることができる。なお、式(6)において $\beta=0$ とすれば、一定軸力 α を受けるはりの固有振動数 ω_i が得られ、式(6)において時間の項を無視すれば、座屈荷重 p_1^* が求められる。

3. 数値結果 (1)固有振動解析 図-2 ($\alpha^*=2.0, \beta^*=1.0$) は、無次元固有振動数 ω_i と温度勾配 δ との関係を無次元バネ定数 κ_e をパラメーターに示したものである。式(4)の級数の項数は、10を採用している。図のように、温度勾配が大きくなれば、振動数が低下するが、この割合は高次ほど大きくなる。また、バネ剛性 κ_e の効果は、一般に振動数を増加させるが、その効果は κ_e のレンジによって異なるといえる。

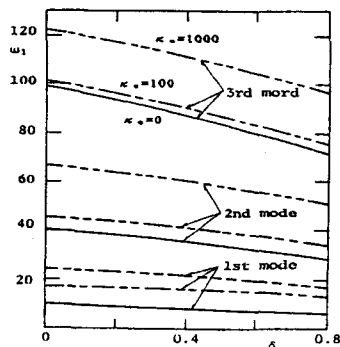


図-2 固有振動数 ω_i と温度勾配 δ の関係

(2)座屈特性 図-3 ($\alpha^*=2.0, \beta^*=1.0$) は、座屈荷重 p_1^* と温度勾配 δ との関係をバネ剛性 κ_e のパラメーターにプロットした結果である。図-2と同様なパラメーターの影響を受ける。文献1)と比較すると、 $\kappa_e=1000$ の3次の座屈曲線に大きな差異が認められるが、これは文献1)の解析が5項近似で、項数が不足するためである。

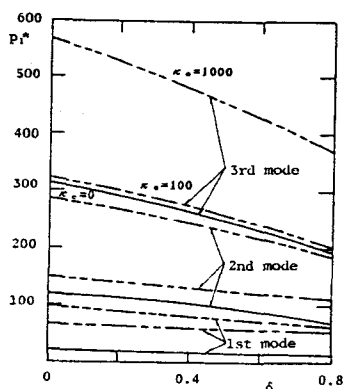


図-3 座屈荷重 p_1^* と温度勾配 δ の関係

(3)不安定領域 図-4, 5は3次振動まで考慮にした $\kappa_e=0$ と100の2ケースのときの不安定領域を示したものである。図中の縦軸は変動軸力の振幅 β を横軸は $\alpha=0$ のときの1次の固有円振動数で無次元化した励振振動数 $\bar{\omega}$ である。また、右下

がりの線部が結合共振 $(\omega_i+\omega_j)/k$ の不安定領域を、右上がりの斜線部が単純共振 $2\omega_i/k$ の不安定領域を意味する。図のように、文献1)では求められていない結合共振が存在する。したがって、本題の不安定領域を求めるためには、文献1)の単純共振のみ求める方法では不十分である。 κ_e は不安定領域の現われる振動数および幅を変える。

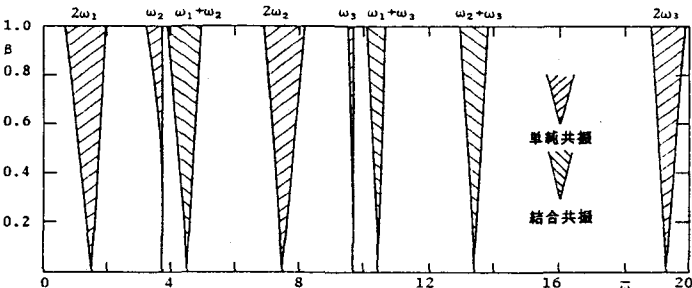


図-4 不安定領域 ($\alpha^*=2.0, \beta^*=1.0, \delta=0.2, \kappa_e=0.0$)

4. まとめ 本解法の精度、振動、座屈および動的安定に及ぼす各種パラメーターの影響は講演時に発表する。

参考文献 1) Kar, R.C. and Sujata, T. : Journal of Sound and Vibration (1988) 122, 209-215.

2) Takahashi, K. : Journal of Sound and Vibration (1982) 85, 257-262.

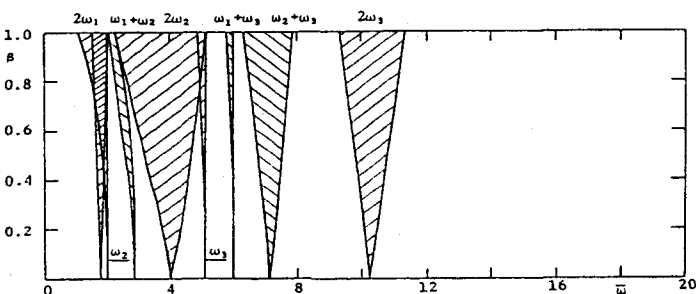


図-5 不安定領域 ($\alpha^*=2.0, \beta^*=1.0, \delta=0.2, \kappa_e=100.0$)