

変動軸力を受けるはりの安定を失った後の動的応答

長崎大学工学部 学生員 ○手塚 仁

長崎大学工学部 正 員 高橋和雄

長崎大学工学部 正 員 小西保則

1. まえがき はり部材の動的安定性は、これまで数多く行われているが¹⁾、不安定領域における安定を失った後の応答まで取り扱った研究は少ない。そこで、本研究は、両端で軸方向変位が拘束されたはり、中立軸の伸び変形が無視できるはりの有限変形理論を用いて、安定を失った後の応答を明らかにするものである。はりの非線形運動方程式を Galerkin法を用いて常微分方程式に変換し、これに、Runge-Kutta-Gill法を適用して時間応答解析を行う手法を採用する。数値解析において、はりの境界条件、初期軸力、減衰力および負荷条件の影響を評価する。

2. 基礎式および解法 図-1に示すようなはりのたわみを y とする。(a)のはりは両端で x 方向の変位を拘束されている。(b)のはりは x 方向の変位が自由である。このはりに静的軸力 P_0 と変動軸力 $P_t \cos \Omega t$ の和からなる $P_0 + P_t \cos \Omega t$ が作用する場合の非線形項(中心軸の伸び(a)、非線形曲率(b)²⁾)まで考慮したはりの運動方程式はそれぞれ次式で与えられる。

$$(a): L(y) = EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{wA}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + (P_0 + P_t \cos \Omega t) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{EA}{2l} \int \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

$$(b): L(y) = EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{wA}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + (P_0 + P_t \cos \Omega t) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + EI \left(2 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 \right) = 0 \quad (2)$$

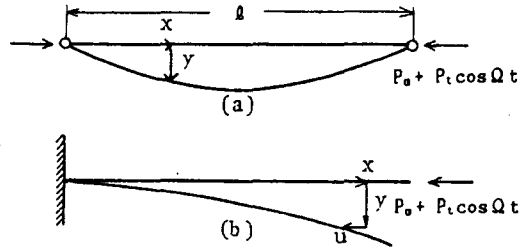


図-1 一般図および座標系

ここに、 E :ヤング率、 I :断面2次モーメント、 w :単位体積重量、 g :重力の加速度、 A :断面積。

式(1)、(2)の解をそれぞれ次のように仮定する。

$$(a): y = r \sum_{i=1}^{\infty} X_i(x) T_i(t), (b): y = l \sum_{i=1}^{\infty} X_i(x) T_i(t) \quad (3)$$

ここに、 T_i :未知の時間関数、 X_i :固有振動形、 r :回転半径、 l :はりの長さ。

式(1)、(2)にGalerkin法を適用すると、次式のような常微分方程式にまとめられる。

$$T_i + \alpha_i T_i + (\bar{P}_0 + \bar{P}_t \cos \omega \tau) \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_{ji} T_j + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \Gamma_{mnji} T_j T_m T_n = 0 \quad (4)$$

ここに、 $\xi = x/l$ 、 $\bar{P}_0 = P_0/P_{cr}$ 、 $\bar{P}_t = P_t/P_{cr}$ 、 $P_{cr} = \pi^2 EI/l^2$ 、 $\tau = \omega_1 t$ 、 $\alpha_i = (\lambda_i/\lambda_1)^2$ 、

$$\lambda_i^* = l^4 w A \omega_1^2 / EI g, \kappa_{ji} = \varepsilon^2 \beta_{ji} / \lambda_1^4 \delta_i$$

$$(a) \Gamma_{mnji} = \gamma_{mn} \beta_{ji} / 2 \lambda_1^4 \delta_i, \delta_i = \int_0^1 x_i^2 d\xi, \beta_{ji} = -\int_0^1 x_i' x_j' d\xi, \gamma_{mn} = \int_0^1 x_m' x_n' d\xi$$

$$(b) \Gamma_{mnji} = \int_0^1 (2x_m'' x_n'' x_k'' + x_m'' x_n'' x_k'') x_i d\xi, \delta_i = \int_0^1 x_i^2 d\xi, \beta_{ji} = -\int_0^1 x_i' x_j' d\xi, \gamma_{mn} = \int_0^1 x_m' x_n' d\xi$$

また、(a)の場合の境界条件として、両端固定(CC)、両端ヒンジ(HH)、一端固定他端ヒンジ(CH)、(b)の場合には片持ちばりに保存力が作用する場合(CF-C)、非保存力が作用する場合(CF-F)を考える。

式(4)は連立の非線形常微分方程式であるから、この一般解を求めることは不可能である。したがって、本研究では、Runge-Kutta-Gill法による時間応答解析を行う。なお、式(4)の非線形項を無視すれば、係数励振振動の微分方程式が得られる。文献3)に示した固有値問題に変換する手法を用いれば、不安定領域を作成することができる。本題の時間応答解析は不安定領域内のパラメーター($\bar{P}_t, \bar{\omega}$)の組合せに対して行う。

3. 数値結果 (1) 不安定領域 図-2、3に片持ちばりの保存力(CF-C)と非保存力の(CF-F)の不安定領域

を示す(保存力の場合、 X_i は座屈波形を用いて近似)。これらの図において、横軸 $\bar{\omega}$ は1次の固有円振動数で無次元化した励振振動数 $\bar{\omega}=\Omega/\omega_1$ を、また、縦軸は無次元変動軸力の振幅 $\bar{P}_t$ である。図-2の保存力の場合は、単純共振の主不安定領域 $2\omega_1$ と結合共振の主不安定領域 $\omega_1+\omega_j$ が得られている。一方、図-3の非保存力の場合には、これらの不安定領域に加えて、差形の結合共振の不安定領域 $\omega_i-\omega_j$ ($i>j$)が得られている。図-2、3の比較からわかるように、負荷形式によって不安定領域が異なるといえる。なお、HH、CHおよびCCのはりは保存力を対象としているために、CF-Cの不安定領域と本質的に同じであるが、HHのはりにおいては、結合共振は存在しない。

(2)最大応答 非線形項を考慮した時間応答解析によって得られた非線形時間応答の1例(CC, $2\omega_1$)を図-4に示す。図のように、応答振幅の大きさは有限の大きさとなり、うなりを伴った特有の応答波形をもつ。この系の最大応答は、このうなりの最大振幅から得られる。HH、CHおよびCCのはりの主不安定領域 $2\omega_1$ の最大応答(振幅/回転半径)と無次元励振振幅 $\bar{P}_t$ の関係をプロットすれば、図-5の結果を得る。CC、CH、HHの順に振幅が大きい。図-6は片持ちばりの $2\omega_1$ の不安定領域の無次元最大応答(振幅/長さ)である。保存力と非保存力の負荷条件によって、応答振幅が異なることがわかる。

4. まとめ 片持ちばりの不安定領域、最大応答に及ぼす境界条件および負荷条件の影響を明らかにした。不安定領域および最大応答に及ぼす境界条件、減衰力、静的軸力の影響などは講演時に発表する。

参考文献 1) Iwatsubo, T., Sugiyama, Y. and Ogino, S.: Journal of Sound and Vibration (1974) 33(2), pp.211-221.
2) Takahashi, K.: Journal of Sound and Vibration (1979) 64(1), pp.31-34.
3) Takahashi, K.: Journal of Sound and Vibration (1982) 85, pp.252-262.

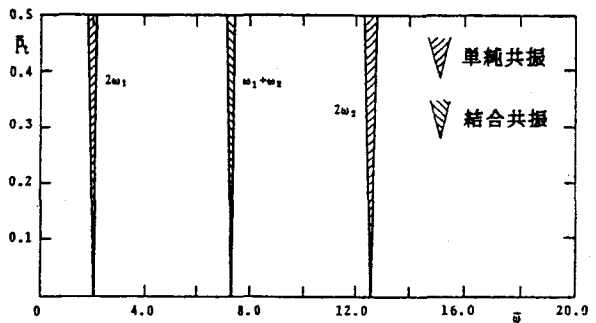


図-2 片持ちばり(CF-C)の不安定領域

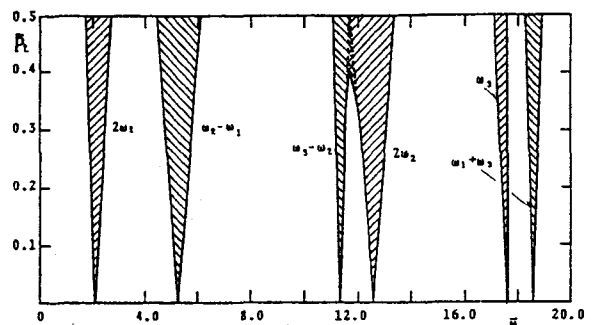


図-3 片持ちばり(CF-F)の不安定領域

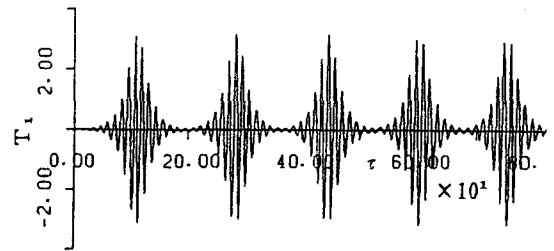


図-4 時間応答波形(CC, $2\omega_1$, $\bar{P}_t=0.5$)

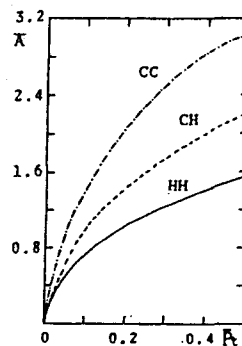


図-5 最大応答と変動軸力の関係(a)

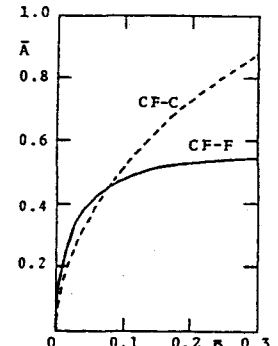


図-6 最大応答と変動軸力の関係(b)