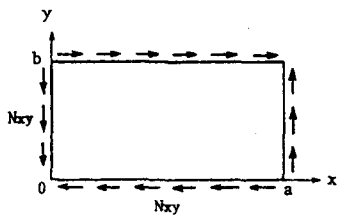
# 面内変動せん断力を受ける周辺固定長方形板の動的安定性

長崎大学工学部　学生員　○田中康仁
長崎大学工学部　正　員　高橋和雄
長崎大学工学部　正　員　小西保則

1．まえがき　平板の周辺に面内周期的変動せん断力が作用すると、係数励振によって面外振動が発生する。著者らは、周辺単純支持（case Ⅰ）および一対辺単純支持、他対辺固定（case Ⅱ）の長方形板の動的安定性を解析している[1)2)]。これより、せん断力を受ける場合の長方形板の不安定領域の種類は、一様圧縮力や曲げモーメントの場合と比較して著しく異なることを明らかにしている。引き続いて、本研究は、全周辺固定（caseⅣ）の長方形板の動的安定性を解析し、静的せん断力を受ける場合の固有振動特性および不安定領域を求めて、動的安定性に及ぼす境界条件の影響を検討する。

2．解法　図－1に示すような長方形板の面外方向の変位をw(x,y,t)とする。平板の周辺に静的せん断力$N_{xy0}$と変動せん断力$N_{xyt}\cos\Omega t$の和からなるせん断力$N_{xy}$が作用するものとすると、安定を失った直後の長方形板の運動方程式は次式で与えられる。



図－1　長方形板の一般図

$$L(w)=\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+D\nabla^4 w-2(N_{xy0}+N_{xyt}\cos\Omega t)\frac{\partial w^2}{\partial x\partial y}=0 \quad (1)$$

ここに、$\rho$：板の密度、h：板厚、$D=Eh^3/\{12(1-\nu^2)\}$：板剛度、E：ヤング率、$\nu$：ポアッソン比、$\Omega$：励振円振動数、t：時間。

長方形板の境界条件は、全周辺固定（caseⅣ）とする。式(1)の解を次のように仮定する。

$$w=\sum_{m=1}\sum_{n=1} T_{mn}(t)W_{mn}(x,y) \quad (2)$$

$T_{mn}$：未知の時間関数

$$W_{mn}=\sum_{p=1}\sum_{q=1} a_{pq}^{mn}\{\cos(p-1)\pi\xi-\cos(p+1)\pi\xi\}\{\cos(q-1)\pi\eta-\cos(q+1)\pi\eta\}$$

：境界条件を満足する座標関数、ここでは、周辺固定長方形板の固有振動形を用いている。式(3)を式(1)へ代入してGalerkin法を適用し、無次元化すると、次式のような時間関数$T_{mn}$に関する運動方程式が得られる。

$$[I]\{\ddot{T}\}+[F]\{T\}+(\bar{N}_{xy0}+\bar{N}_{xyt}\cos\bar{\omega}\tau)[G]\{T\}=\{0\} \quad (3)$$

ここに、[I]：単位行列、[F]：対角行列 $\mathrm{diag}(\omega^2_{11}\ \omega^2_{12}\ \omega^2_{13}\cdots\omega^2_{21}\cdots)$, [G]：係数励振行列(正方行列)、$\{T\}=\{T_{11}\ T_{12}\ T_{13}\cdots T_{21}\ T_{22}\ T_{23}\cdots\}^T$，$\bar{N}_{xy0}=N_{xy0}/N_{cr}$，$\bar{N}_{xyt}=N_{xyt}/N_{cr}$，$N_{cr}$：座屈せん断力，$\bar{\omega}=\Omega/\Omega^1_1$：無次元加振円振動数，$\omega_{mn}=\Omega^m_n/\Omega^1_1$，$\tau=\Omega^1_1 t$。

いま、m,n=1,2,3,4 まで採用した16自由度系$\{T_{11}\ T_{12}\ T_{13}\ T_{14}\ T_{21}\ T_{22}\ T_{23}\ T_{24}\ T_{31}\ T_{32}\ T_{33}\ T_{34}\ T_{41}\ T_{42}\ T_{43}\ T_{44}\}^T$を考える。係数行列[G]の性質より、式(3)は次のように2個の微分方程式に分離分割される。

$$[I_1]\{\ddot{T}_1\}+[F_1]\{T_1\}+(\bar{N}_{xy0}+\bar{N}_{xyt}\cos\bar{\omega}\tau)[G_1]\{T_1\}=\{0\} \quad (4\text{-a})$$

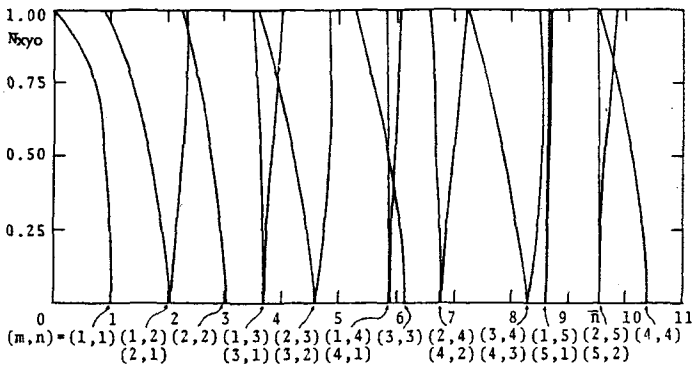
$$[I_2]\{\ddot{T}_2\}+[F_2]\{T_2\}+(\bar{N}_{xy0}+\bar{N}_{xyt}\cos\bar{\omega}\tau)[G_2]\{T_2\}=\{0\} \quad (4\text{-b})$$

ここに、$\{T_1\}=\{T_{11}\ T_{13}\ T_{31}\ T_{33}\ T_{12}\ T_{32}\ T_{14}\ T_{34}\}^T$, $\{T_2\}=\{T_{21}\ T_{23}\ T_{41}\ T_{43}\ T_{22}\ T_{42}\ T_{24}\ T_{44}\}^T$

式(5-a)と(5-b)から別個に得られる不安定領域を各々TYPE-1, TYPE-2とする。

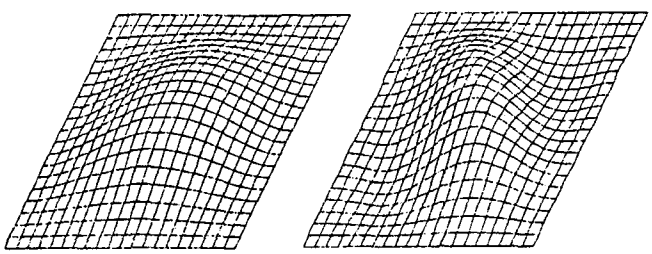
3．数値結果　(1)固有振動解析　式(3)において、$\bar{N}_{xyt}=0.0$とおけば、静的せん断力$\bar{N}_{xy0}$を受ける平板の運動方程式が得られる。縦横比$\beta=1.0$の長方形板に対する静的せん断力と固有振動数との関係は図－2に示すとおりである。なお、計算にあたっては級数の項数p,qは10項まで採用している。図中において、横軸$\bar{n}=\Omega_{mn}/\Omega_{11}$は、各次の固有振動数$\Omega_{mn}$を$\bar{N}_{xy0}=0.0$のときの最低次の固有円振動数$\Omega_{11}$で基準化した無次

元固有振動数である。また、縦軸$\bar{N}_{xy0}$は無次元せん断力である。図中の記号(m,n)は$\omega_{mn}$、すなわち、$\bar{N}_{xy0}$= 0.0のときのx,y方向の半波数m,nを意味する。静的せん断力が作用すると、固有振動形の対称性(x,y軸に対して)が失われるから、x,y方向の半波数の意味がなくなるので、あくまでも(m,n)が意味をもつのは$\bar{N}_{xy0}$= 0.0の場合だけである。平板内の応力分布に圧縮と引張領域が同時に存在するためと考えられる。最低次の固有円振動数$\omega_{11}$は$\bar{N}_{xy0}$の増大とともに1.0から0.0に変化する。$\bar{N}_{xy0}$= 1.0, $\omega_{11}$=0.0は静的せん断力による座屈状態に対応し、この時の固有振動形は座屈波形に一致する。




図－2 無次元固有振動数$\bar{n}$と無次元静的せん断力$\bar{N}_{xy0}$との関係

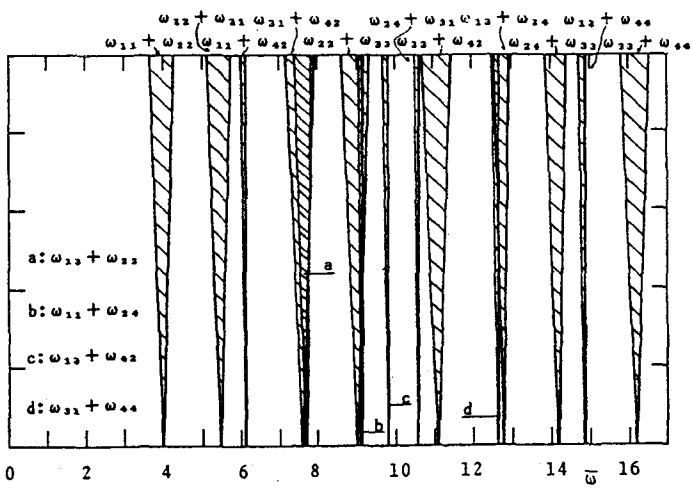
図－3に$\bar{N}_{xy0}$= 0.0と1.0の場合の最低次の固有振動形の比較を示す。正方形板の対角線に沿うせん断力による圧縮力と引張力によって、対角線に対して対称な波形となる。



(a) $\bar{N}_{xy0}$=0.0　　(b) $\bar{N}_{xy0}$=1.0

図－3 固有振動形と座屈波形($\beta$=1.0)

(2)面外不安定領域　図－4にTYPE-1($\bar{N}_{xy0}$= 0.0, $\beta$=1.5)の面外不安定領域を示す。横軸$\omega$は無次元加振振動数を、縦軸$\bar{N}_{xyt}$は無次元せん断力の振幅を示す。図中の右下がりの斜線部が結合共振の不安定領域を意味する。文献1), 2)のcase I, IIと同じ種類の不安領域がcase IVにも現われている。




図－4　面外不安定領域 (TYPE-1、$\bar{N}_{xy0}$= 0.0, $\beta$=1.5)

4．まとめ　TYPE-2の不安定領域および、単純共振も含んだ詳しい不安定領域は、講演時に発表する。

参考文献　1)高橋・夏秋・川副・小西:構造工学論文集,Vol.35A,pp.45~52, 1989. 2)Takahashi,K.,Natsuaki,Y., Nishikawa,H. and Konishi,Y.:Proc. of JSCE(to appear),1990.