動的解析における数値解析の精度

九州大学工学部　正　員　○ 北川正一
九州大学工学部　正　員　　鳥野　清
九州大学工学部　正　員　　堤　　一

1．まえがき

コンピュータの発達は，多くの新しい数値解析法を生み出し，様々な分野に大きな進歩をもたらした．構造解析の分野においても有限要素法をはじめとする強力な方法が開発され，いろいろな問題に対し大きな成果をあげている．しかしながら，コンピュータの性質上，ほとんどの場合その解析法は近似によるものであり，誤差を考慮しなければならない．さらに対象とする構造物が複雑になってくると，その力学的性質を完全に把握することは不可能に近く，解析に際しては目的に応じ，適当な仮定をおく必要がある．それら解決すべき問題は未だ多く残されているが，数値解析における計算結果に対する信頼性，および精度を検討することはこれらの問題の解決のためにも，意義があると思われる．また，構造物の特性変化，特に劣化を問題とするとき，実測データの信頼性を考慮することは当然のことであるが，数値解の精度，誤差を正確に捉えておくことは前提条件として必要不可欠なことである．

2．1自由度系の場合

構造物の挙動を記述する運動方程式 $[M]\{\ddot{Y}\}+[C]\{\dot{Y}\}+[K]\{Y\}=\{P\}$ …(*) について，その解の精度について考察する。実際の問題では，多自由度系について考える必要があり，(*)は連立方程式となる．しかし，質量マトリックス[M]，減衰マトリックス[C]および剛性マトリックス[K]が，同時に対角化できるならば(*)は自由度の数だけの独立な一次元の方程式に分離される．モード解析法は特にそのような場合に有効な手法であり，(*)は各次の振動に対する独立な方程式に帰着される．その点を考慮し，まず1自由度系の方程式に対し，外力{P}が簡単な形をしている場合について調べる．実際に計算を行ったのは，

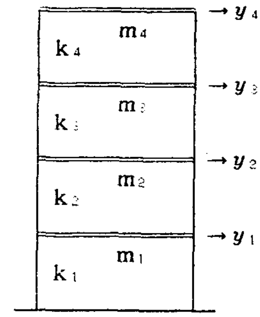
$$(\mathrm{I})\quad P(t)=\begin{cases} P_0 & (0\leqq t\leqq t_0) \\ 0 & (t_0<t) \end{cases} \qquad\qquad (\mathrm{II})\quad P(t)=P_0\sin\omega t$$

の２つの場合である．これらの場合は厳密解を初等関数により表現することができる。しかし，不規則な外力に対しては，厳密解をただちに計算可能な形で表現することはできない．そこで，積分法による数値解を考える必要が生じ，そのような手法については様々な方法が提出されている．それらは近似的解法であり，誤差を含むことは避けられないが，適用範囲が広いという利点を持つ．ここでは、まず(*)を1階の連立方程式に変換し，ルンゲ-クッタ-フェールバーグ法（ＲＫＦ45）を適用し，厳密解との比較を行った．初期条件は $t=0$ において $Y=\dot{Y}=0$，パラメータとしては，$M=5.0$，$C=90$，$K=3000$，$P_0=5.0$，(Ⅰ)では $t_0=0.30$，(Ⅱ)では $\omega=24.5$ とした．実変数については倍精度(８バイト)で計算を行い，ＲＫＦ45 における誤差を評価し，精度を調節した結果，$t=0.0$ から 0.01 刻みで $t=1.20$ までの間，(Ⅰ)，(Ⅱ)いずれの場合も厳密解による計算値と８～10桁程度一致していることが確認できた．プログラム言語としてはＣを用い，パーソナル・コンピュータにより計算を行ったが，要した時間は厳密解の計算で数秒から数十秒，ＲＫＦ45 で数分であった．

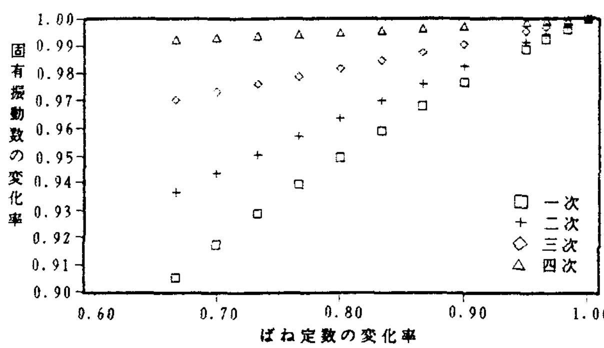
3．多自由度系の場合

方程式(*)について，多自由度系の問題を考えるとき，モード解析法はいろいろな点で有効な方法である．その最も重要な部分を占めるものとして，固有値解析がある．これについてもタイプに応じて様々の手法が得られているが，ここでは，非対称なマトリックスで，複素数の固有値を持つものに対しても適用できる方法を採用し解析を行なった．固有値問題 $[A]\{X\}=\lambda\{X\}$ に対し，得られた固有値 λ および固有ベクトル{X}の精度については，$[A]\{X\}-\lambda\{X\}$ … (**)を計算し，十分零ベクトルに近い値になっていることを確かめることにより，保証されると考えた．

図－1に示すような4層ラーメンを4質点系，各階の水平変位 y_1～y_4 の4自由度の振動系とみなし，解析を行なった．方程式(*)において，減衰マトリックスについては[C]＝0.03×[K]と仮定した．精度については実変数倍精度で計算を行ない，(**)式の各成分の絶対値が 10^{-10} より小さくなっていることを確認した．マトリックスの次数が小さいこともあり，パーソナルコンピュータを用いても計算に要した時間は数秒であった．用いたパラメータの値は各層の質量を $m_1=\cdots=m_4=5.0[t\cdot s^2/m]$，ばね定数を $k_1=\cdots=k_4=3000[t/m]$ とし，これを基準とした．これらの値に対する固有値解析の結果を表－1に示す．さらに剛性の変化が，構造物の振動特性，特に固有振動数にどの様な影響を及ぼすかをみるため，ばね定数のうちの一つを最小 2000[t/m]まで変化させてみた．k_1 を変化させたときの固有振動数への影響を図－2に示す．他の k_i (i=2, 3, 4)についても同様の結果が得られ，いずれの場合もばね定数の変化に対し，固有振動数は単調に変化している．また，どの層のばね定数を変化させるかにより，最も大きい影響を受ける固有振動数の次数が異なっている．表－1のせん断力モードに注目すると，ばね定数を減少させた層のせん断力が他の層に比較して大きくなっているような次数の固有振動数が，大きく変化する傾向がみられることがわかる．

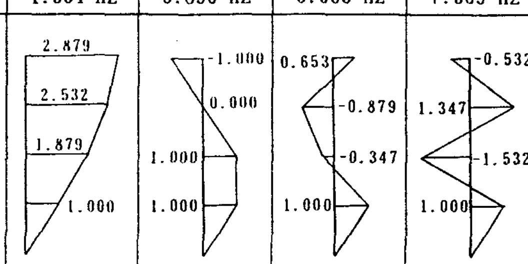


図－1　4層ラーメン



図－2　剛性および振動数の変化

表－1　振動特性

次数	一次	二次	三次	四次
固有振動数	1.354 Hz	3.896 Hz	5.963 Hz	7.309 Hz
変位モード 	2.879 2.532 1.879 1.000	-1.000 0.000 1.000 1.000	0.653 -0.879 -0.347 1.000	-0.532 1.347 -1.532 1.000
せん断力モード	0.347 0.653 0.879 1.000	-1.000 -1.000 0.000 1.000	1.532 -0.532 -1.347 1.000	-1.879 2.879 -2.532 1.000

4．まとめ

1自由度系の場合，方程式(*)の数値解について，単純な形の外力{P}に対しては，積分法によっても十分な精度の値が得られている．しかし，実際の地震波等に対する応答を求めるためには，不規則な外力に対する解を計算しなければならない．この場合，厳密解を簡単な形で表示することができず，なんらかの形での数値積分は避けられない．積分法の適用に際しても刻み幅等を検討する必要がある．

多自由度系の場合については，解を積分表示し，数値積分により応答計算を行なう方法について検討中である．また，4層ラーメンでは，ばね定数を 33 %程度変化させると，固有振動数は最も変化が大きいもので約 7 ～ 9.5 %変化している．逆に，固有振動数の変動が剛性の変化に関する情報を与えていると考えれば，一次の固有周波数の 1 %の低下は，第1層については，ばね定数の 3.5 %程度の減少を示すものであるととらえられる．