

要素剛性分離の手法による等張力曲面解析

佐賀大学 学生員 深江 葉子
正 員 後藤 茂男
正 員 井嶋 克志

1. まえがき

近年、ブームとなった各地の博覧会の各種パビリオンにおいて膜構造が使用され、その斬新な力学曲面の造形美がより身近なものとなった。膜構造設計の基本は、応力集中の少ない安定した曲面形状を求めることにあると言われている。

曲げ剛性のない、張力のみに抵抗できる連続した超軽量の薄膜材で曲面を覆う構造形態を考えれば、自重を無視した場合、内圧と釣り合う定張力分布を示す石鹸膜の形状を初期形状として設定することはきわめて合理的であり、その条件下において最小の表面積となる石鹸膜曲面の問題は、古くから微分幾何学、複素関数論また変分学分野で研究されてきた。

しかしながら、針金などで任意な立体閉曲面をつくり、石鹸液をくぐらせて優美な最小曲面を観察することはできても、前記の理論による解析解を得ることはできず、膜構造の初期形状決定には石鹸膜模型が利用されていた。

著者らは、有限要素構造物の要素変形と節点変位の適合条件の非線形性に起因する接線幾何剛性を要素固有の剛性から完全に分離して接線剛性法を適用する幾何学的非線形手法を任意境界の石鹸膜構造に応用することを考え、好結果を得たのでここに発表する。

2. 三角形膜要素の定張力要素力

一定張力分布状態(定張力)の膜面を平面三角形要素による有限要素構造で近似する。

等方性の平面三角形要素に図-1のような静定な支点条件を与えた時の要素力式は

$$\begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix} = \frac{tE}{2ab(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} b^2 & ab\nu & 0 \\ ab\nu & a^2+c^2\mu & -bc\mu \\ 0 & -bc\mu & b^2\mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} \quad (1)$$

$$\mu = (1-\nu)/2 \quad (2)$$

となるが、定歪み、定張力の条件より

$$[\Delta a, \Delta b, \Delta c] = (1-\nu)/2E [a, b, c] \quad (3)$$

$$\begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix} = \frac{\sigma t}{2} \begin{Bmatrix} b \\ a \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4) \quad \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} = \frac{\sigma t}{2} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

図-1

などが、得られる。3頂点の節点力の合力は、各底辺と直交し、その辺長に比例する。(5)、図-2)

図-3の辺に沿う辺張力に対しては次式のようになる。

$$N_i = \sigma t (a_i^2 - c_i d_i) / 2a_i \quad (6)$$

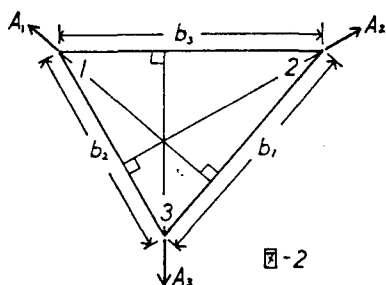


図-2

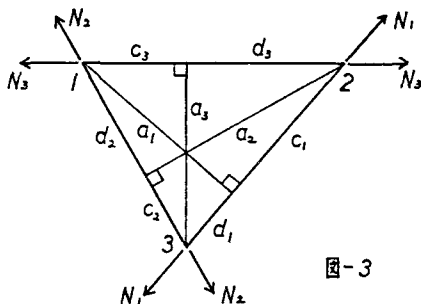


図-3

3. 要素力剛性

これらの要素は、通常の構造材によるものと異なり、いわゆる要素剛性は存在しないが定張力下での形状の変化に対する要素力の変化として式(4)の微小増分を考えれば、

$$\begin{bmatrix} \delta A \\ \delta B \end{bmatrix} = \frac{\sigma t}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta a \\ \delta b \end{bmatrix} \quad \text{..... (7)}$$

となる。共通座標系に対する頂点*i*の座標値 u_i, v_i, w_i , 座標値ベクトルと微小変位ベクトルを

$$u_i^T = [u_i, v_i, w_i]^T, \delta u_i^T = [\delta u_i, \delta v_i, \delta w_i]^T \quad \text{..... (8)}$$

とおき、要素座標系の方向余弦ベクトル

$$\alpha = [u_2 - u_1] / b, \beta = [b u_3 - c u_2 - d u_1] \quad \text{..... (9)}$$

を用いて線形の適合条件を表せば

$$\delta a = \beta^T \delta u_3 - (c \beta^T \delta u_2 + d \beta^T \delta u_1) / b \quad \text{..... (10)}$$

$$\delta b = \alpha^T (\delta u_2 - \delta u_1) \quad \text{..... (11)}$$

となるので、結局、単一要素の共通座標系に関する接線剛性方程式における要素力剛性マトリックス K_0 は次式となる。

$$K_0 = \frac{\sigma t}{2b} \begin{bmatrix} d(\alpha \beta^T + \beta \alpha^T) & c \alpha \beta^T - d \beta \alpha^T & -b \alpha \beta^T \\ c \beta \alpha^T - d \alpha \beta^T & -c(\alpha \beta^T + \beta \alpha^T) & b \alpha \beta^T \\ -b \beta \alpha^T & b \beta \alpha^T & 0 \end{bmatrix} \quad \text{..... (12)}$$

4. 幾何剛性と接線剛性方程式

三角形要素の辺張力 N_1, N_2, N_3 による接線幾何剛性マトリックスは、三辺をそれぞれ軸方向力部材と考えた時のトラスブロックの接線幾何剛性マトリックスと全く同一となる。

即ち、辺*i*の共通座標系に対する方向余弦を $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ とすれば、その一端を固定した軸方向力部材としての接線幾何剛性マトリックスは

$$k_i = \frac{N_i}{b_i} \begin{bmatrix} 1 - \alpha_i^2 & -\alpha_i \beta_i & -\alpha_i \gamma_i \\ -\alpha_i \beta_i & 1 - \beta_i^2 & -\beta_i \gamma_i \\ -\alpha_i \gamma_i & -\beta_i \gamma_i & 1 - \gamma_i^2 \end{bmatrix}_i \quad \text{..... (13)}$$

となり、これを用いて三角形要素の接線幾何剛性方程式が次のように得られる。

$$\begin{bmatrix} \delta U_1 \\ \delta U_2 \\ \delta U_3 \end{bmatrix} = (K_0 + \begin{bmatrix} k_2 + k_3 & -k_3 & -k_2 \\ -k_3 & k_2 + k_1 & -k_1 \\ -k_2 & -k_1 & k_1 + k_2 \end{bmatrix}) \begin{bmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \\ \delta u_3 \end{bmatrix} \quad \text{..... (14)}$$

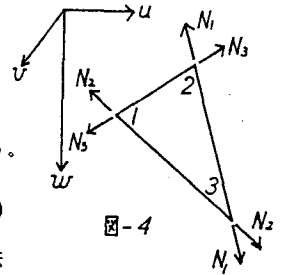


図-4

なお、 K_0 の影響はほとんどなく、石鹸膜構造は幾何剛性のみを有する特殊な構造系であると言える。

5. 内圧による面外節点力

一定内圧を受ける石鹸膜を計算する場合、要素の変形により各反復段階毎、各節点に作用する面外節点力の大きさと方向が変化することになるが、一つの要素の3頂点の値は等しく、内圧を*p*として次のベクトルで表される。

$$P = (u_2 - u_1) \times (u_3 - u_1) p / 6 \quad \text{..... (15)}$$

6. 計算例

