

切り欠きを持つ補剛アーチ橋の固有値解析について

熊本大学 学生員 清田 秀二 熊本大学 正 員 平井 一男
八代高専 正 員 水田 洋司

1. まえがき:

本研究は、解が容易に求められる単純支持の梁を基本構造とする梁構造物の解¹⁾を利用して、切り欠きを持つ梁構造物の固有振動数、固有モードを求め、さらに補剛アーチ橋の解析方法について述べている。ここでは、切り欠きの状態を梁構造物に作るために、一対の曲げモーメントを導入し、切り欠きを力に置き換える方法を用いている。数値計算は、この様にして得られた切り欠きの幅と深さによって、どの様に固有振動数が変化するかを、実橋のデータを用いて明らかにした。本論文で用いた切り欠きは有限幅のものからヘアクラックの様なものまでを対象としている。

2. 切り欠きの作成:

周期曲げ荷重 $\Gamma_0 \sin \omega t$ が図-1 の様な振動系に作用するとき、支点から x の距離にある任意点のたわみ $W(x)$ は次式で与えられる。

$$W(x) = -\sum \frac{\Phi_n(x)}{\lambda_n - \lambda} \Phi_n''(x_j) \Gamma_0 \sin \omega t \quad (1)$$

ここで、 λ_n : 振動系の n 次の固有振動数 ω_n (rad/sec) の2乗、 $\lambda: \omega^2$ 、 Φ_n : n 次の正規化モード、 x_j : 荷重の作用位置、 $\Phi_n'(x)$: $\Phi_n(x)$ の距離 x に関する1階微分。

(1) 式の Γ_0 (曲げ荷重) は、 $M_0 \Delta x_j$ であり、1対のモーメント荷重が、微小距離 Δx_j だけ離れて作用していることを表している。次に、図-2 で I_a 部分を取り除いて、 Δx_j 部分に I_b を残すことにより切り欠きを作ることを考える。この時、曲げ荷重 Γ_0 と Γ_0 の作用によって生じる部材の曲げモーメント M_j は、断面2次モーメント I_a と I_b に比例して内分される。ここで、 I_a 部分を除去し、残りの部分において、自由振動時に外力が0という条件から、次のような振動数方程式が得られる。

$$\frac{1}{\Delta x_j} - K \alpha(\lambda) = 0 \quad (2)$$

$$\text{ここに、} \alpha(\lambda) = E I \sum \frac{\Phi_n''(x_j) \Phi_n''(x_j)}{\lambda_n - \lambda} = M_0 + E I \sum \left\{ \frac{\lambda}{\lambda_n(\lambda_n - \lambda)} \right\} \Phi_n''(x_j) \Phi_n''(x_j) \quad (3)$$

式中の M_0 は、 x_j の位置に作用する単位曲げ荷重 ($\Gamma_0 = 1$) による静的曲げモーメントである。(3) 式を満足する λ を求めることにより、図-3 の様に梁の一部に切り欠きを持つ振動系の固有振動数を算定することができる。

3. 切り欠きを持つ補剛アーチ橋:

図-4 の様な補剛アーチ橋を図-5 の様に補剛桁とアーチに分けて考え、この二つを力の釣合条件、変形の適合条件を満足する様に結合²⁾すれば、図-4 のような補剛アーチ橋の条件式が得られる。一つは、自由振動時の外力は零であるという条件式で、もう一つは補剛桁の切り欠き部分の曲げモー

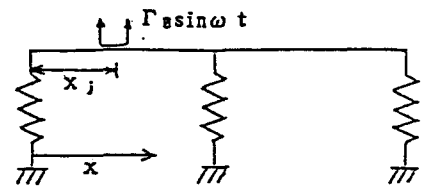


図-1 曲げ荷重

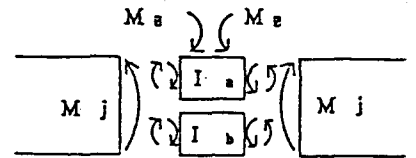


図-2 曲げモーメントの分配

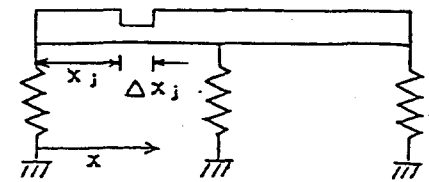


図-3 切り欠きを持つ梁

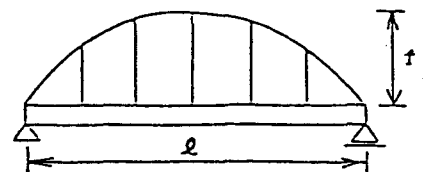


図-4 補剛アーチ橋

メントの釣合式である。

後者は図-2と同じ状

態になり、(3)式に

対応した式が得られる。

この二つの条件式を計

算し整理すると、次式

のような無次元化され

た振動数方程式が得られる。

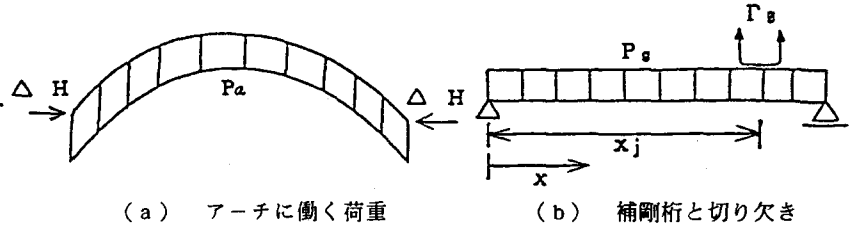


図-5 補剛桁とアーチ

$$\left[\begin{aligned} &1 + \frac{512\beta}{\pi^6} \Sigma \frac{1}{n^2(n^4 - \lambda')} - \frac{2}{\pi^3} \Sigma \frac{\lambda'}{n^3(n^4 - \lambda')} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x_j\right) - \frac{M_{sg1}}{2} \\ &\frac{256\beta}{\pi^3} \Sigma \frac{n}{n^4 - \lambda'} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x_j\right) - K - \Sigma \frac{\lambda'}{n^4 - \lambda'} \sin^2\left(\frac{n\pi}{l} x_j\right) \end{aligned} \right] = 0 \quad (4)$$

ここに、 $B = A_g A_a / \{A_a + A_g (1 + 8(f/l)^2 + 19.2(f/l)^4)\}$ (5)

$\lambda' = \lambda / \lambda_1$, $\lambda_1 = (\pi/l)^4 \times (EI/\rho)$, ρ : 単位長さの質量, EI : 曲げ剛性, l : スパン長

f : アーチのライズ長, A_a : アーチ断面積, A_g : 補剛桁断面積, $K = l / 2 \Delta x_j$, $\beta = f^2 B / I$

$I = I_a / I_b$, M_{sg1} : $P_g = 1$ の荷重が作用した時の x_j 点の無次元化された静的曲げモーメント。

4. 数値計算:

図-6に示す様なスパン中央部に切り欠きを持つ補剛アーチ橋及び、同位置に切り欠きを持つ単純梁の解析を行う。梁の断面は、矩形とする。単純梁の場合は、(2)式より

$$\Sigma \frac{\lambda'}{n^4 - \lambda'} \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{l}{2 \Delta x_j} = K \quad (6)$$

切り欠きを持つ梁と、切り欠きのない梁の固有振動数をそれぞれ ω_m , ω_n とし、その比を $R = \omega_m / \omega_n$, スパン長 (l) と切り欠きの大きさ (Δx_j) に関する比を $K = l / 2 \Delta x_j$ で表し、 R と K の関係をグラフに示すと図-7の様になる。(a)

, (b) はそれぞれ戸崎橋と子飼橋の場合を示しており、●印は補剛アーチ橋の場合、▲印は補剛桁のみ(単純梁)の場合を示している。

5. 結論:

切り欠き部分の断面が梁として充分の強度を持ち、梁全体が弾性挙動する範囲内では、固有値に影響する切り欠きの大きさは、その幅と深さによって、解析上評価できることがわかった。しかし、梁構造物では固有値(振動数、モード)の変化で、切り欠きの有無や位置などを判定するのは非常に困難であり、補剛アーチ橋に関しては単純梁以上に困難なことが判った。

6. 参考文献:

(1) Itio Hirai, Torazo Yoshimura: Eigenvalue Analysis of Structure by Folding Force, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, EM6, pp1081-1092, 1970. 11.

(2) 吉村・平井: ランガー桁の動的解析, 土木学会論文誌, 第101号, pp1-14, 1964. 1.

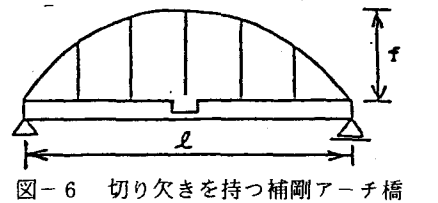


図-6 切り欠きを持つ補剛アーチ橋

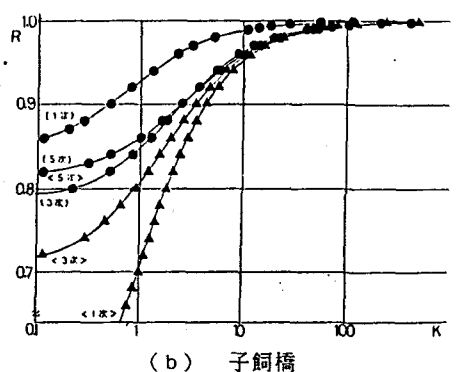
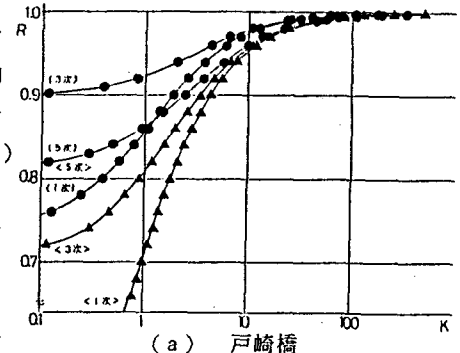


図-7 固有振動数の変化と損傷の関係