境界要素法による地下塩水くさびの移流拡散解析

九州産業大学　正員　加納正道　　福 岡 大学　正員　黒木健実
九州産業大学　正員　赤坂順三　　九州産業大学　学員○樋口善孝

1．まえがき　海岸近くの地下滞水層より淡水をくみ上げる時におこる塩水くさびの浸透と濃度拡散問題の予測や対策は水資源工学上の重要な研究課題である。本論では塩水くさびの移流拡散問題に関して定常状態における非連成系と連成系の境界要素法の定式化を示し、これによる数値解析結果と室内実験結果とを比較する。

2．基礎方程式　塩水くさびの地下透水層内における浸透流と移流分散の現象が水頭H（$t, x1, x2$）と濃度C（$t, x1, x2$）を用いて次のように記述される偏微分方程式系を考える。ここにtは時間を示し、$x1$，$x2$は2次元の直行座標系を示している。

浸透流方程式　$$\{C(H)+\alpha S\}\dot{H}+u_{i,i}=0 \tag{1}$$

移流拡散方程式　$$\dot{c}+q_{i,i}=0 \tag{2}$$

ただしC（H）：比水分容量、α：飽和か不飽和を表わす係数｛1（飽和領域）or 0（不飽和領域）｝、$\dot{H}=\partial H/\partial t$、$u_{i,i}=\partial u_1/\partial x_1+\partial u_2/\partial x_2$、$u_i=-k_{ij}\{H_{,j}+\delta_{j2}(1+\beta c)\}$、$k_{ij}$：透水係数テンソル、$\delta_{j2}$：Kroneckerのデルタ、$\beta=(\rho_s-\rho_f)/\rho_f$、$\rho_s$：塩水の密度、$\rho_f$：淡水の密度、$\dot{c}=\partial c/\partial t$、$q_i=-d_{ij}c_{,j}+u_{,i}\cdot c$、$d_{ij}$：拡散係数テンソルである。

3．非連成系による定式化　重み付残差表示を用い、H^*を重み関数、$A=\{C(H)+\alpha S\}$とし、$c_{,n}=\partial c/\partial n$、$c^*_{,n}=\partial c^*/\partial n$と簡略化し発散定理を適用して展開すれば次式のようになる。[1)]

$$\int A[HH^*]_t^s d\Omega-\iint AH\dot{H}^* d\Omega dt+\iint(u_i n_i H^*+k_{ij}HH^*_{,i}n_j)d\Gamma dt$$
$$-\iint k_{ij}HH^*_{,ij}d\Omega dt+\iint k_{ij}\delta_{j2}\beta cH^*_{,i}d\Omega dt=0 \tag{3}$$

$$\int A[cc^*]_t^s d\Omega+\iint c(\dot{c}^*+dc^*_{,ii})d\Omega dt-d\iint(cc^*_{,n}-c_{,n}c^*)d\Gamma dt$$
$$=\iint u_i c_{,i}c^* d\Omega dt \tag{4}$$

浸透流および移流拡散が定常とみなせる場合には異方性が取り扱うことができ、次式を満足する重み関数を用いることによって非連成系による塩水くさびの移流拡散解析を実行することができる。

$$k_{11}H^*_{,11}+k_{22}H^*_{,22}=\delta(r) \quad (5)、\quad d_{11}c^*_{,11}+d_{22}c^*_{,22}=\delta(r) \quad (6)$$

これらを満足する基本解は次のように示すことができる。

$$H^*=\log r/(2\pi\sqrt{k_{11}k_{22}}) \qquad r=\sqrt{(x_1-x_{1p})^2/k_{11}+(x_2-x_{2p})^2/k_{22}}$$
$$c^*=\log r'/(2\pi\sqrt{d_{11}d_{22}}) \qquad r'=\sqrt{(x_1-x_{1p})^2/d_{11}+(x_2-x_{2p})^2/d_{22}}$$

これらを適用し積分方程式において$\dot{c}=\dot{H}=0$とすれば非連成系定常問題の基本式は次のように得られる。

$$\int(u_i n_i H^*+k_{ij}HH^*_{,i}n_j)d\Gamma-\gamma H(P)+\int k_{22}\beta cH^*_{,2}d\Omega=0 \tag{7}$$

$$\int(q_i n_i H^*+d_{ij}cc^*_{,i}n_j)d\Gamma-\gamma c(P)-\int u_i cc^*_{,i}d\Omega=0 \tag{8}$$

4．連成系による定式化　浸透流の場と濃度場を連成させて式（1）、（2）を連立方程式として表わしこれらに重み付残差法を適用する。ここで連立させた式を微分作用素と変数とに分離し非線形項（$u_i c_{,i}$）を右辺に移して次式（9）と記す。

$$\begin{bmatrix} -AD_t + k_{ij}D_iD_j & k_{ij}\delta_{j2}\beta D_i \\ 0 & -D_t + d_{ij}D_iD_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ u_i c_{,i} \end{bmatrix} \quad (i,\ j=1,\ 2) \tag{9}$$

ここに、$x_1=x$, $x_2=y$とし、$D_t=\partial/\partial t$, $D_i=\partial/\partial x_i$である。また、式（9）の微分作用素を［$L_{ij}$］,変数を｛$U_i$｝,右辺強制項を｛$B_i$｝で代表して次式（１０）の形に簡略化して表わす。

$$[L_{ij}]\ \{U_i\} = \{B_i\} \tag{10}$$

次に流れ場と濃度場を連成させるために、両方の場にまたがる重み関数を考える必要があるので次のような重み関数テンソルを用いて領域Ωで重み付残差表示すれば

$$\iint [U^*_{ik}]^T ([L_{ij}]\ \{U\} - \{B\})\, d\Omega\, dt = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

発散定理を適用して次の積分方程式が得られる。なお、［　］^{T}は転置行列を示す。

$$\iint [U^*_{ik}]^T [\mathcal{L}_{ij}]^T \{U\}\, d\Omega\, dt - \iint \begin{bmatrix} U^*_{11} & U^*_{21} \\ U^*_{12} & U^*_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ q \end{bmatrix} d\Gamma\, dt$$

$$- \iint \begin{bmatrix} k_{ij}U^*_{11,i}n_j & d_{ij}U^*_{21,i}n_j \\ k_{ij}U^*_{12,i}n_j & d_{ij}U^*_{22,i}n_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ c \end{bmatrix} d\Gamma\, dt$$

$$= -\iint \begin{bmatrix} u_i c U^*_{21,i} \\ u_i c U^*_{22,i} \end{bmatrix} d\Omega\, dt + \int \begin{bmatrix} A[HU^*_{11}] + [cU^*_{21}] \\ A[HU^*_{12}] + [cU^*_{22}] \end{bmatrix} d\Omega \tag{12}$$

ここに［$\mathcal{L}_{ij}$］は、［L_{ij}］の随伴作用素行列と呼ばれ、線形微分作用素［L_{ij}］を転置し一次微分項に負を乗じたもので、次式のように示される。

$$[\mathcal{L}_{ij}] = \begin{bmatrix} AD_t + k_{ij}D_iD_j & 0 \\ -k_{ij}\delta_{j2}D_i & D_t + d_{ij}D_iD_j \end{bmatrix} \tag{13}$$

ここで、簡単のため定常問題を取り扱えば（$D_t=0$とする）、基本解テンソルが次式を満たすように定めれば式（１２）は連立一次方程式に展開でき、連成系境界要素法による塩水くさび拡散解析が可能となる。

$$[U^*_{ik}]^T [\mathcal{L}_{ij}]^T = [I]\ \delta(r) \tag{14}$$

ここに［I］は単位行列 δ（r）はＤｉｒａｃのデルタ関数である。［$\mathcal{L}_{ij}$］の転置余因子マトリックス等を用いてU^*_{ik}を求めれば次のようになる。[2)]

$$\begin{bmatrix} U^*_{11} & U^*_{12} \\ U^*_{21} & U^*_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{8\pi kd} \begin{bmatrix} 4d(\log r+1) & 0 \\ k\beta r(2\log r+1)\, r_{,2} & 4k(\log r+1) \end{bmatrix} \tag{15}$$

このようなU^*_{ik}を式（１２）に適用すれば連成系境界要素法の塩水くさび拡散解析が可能になる。

5．まとめ　非連成系境界要素法による数値解析結果を図１で示す。非連成系および連成系境界要素法による解析を室内実験とさらに精度よく照合するためには内部セルを小さくし、その場合に生じる特異積分を精度よく実行する問題が残っている。

参考文献　１）加納他；塩水くさびの移流拡散定常解析、境界要素法論文集 第4巻　２）M.Kanoh et.al；Control Volume Boundary Element Formulation for Salt-Water Wedge Diffusion、Proceedings of 10th International Conference on Boundary Element Methods in Engineering

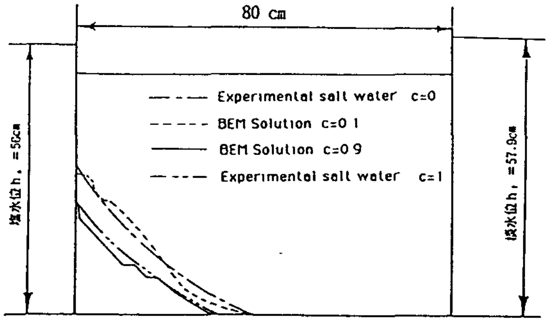

図１　非連成定常ＢＥＭ解及び模型実験結果