

重み付差分法による地下塩水くさび 浸透流解析

九州産業大学 正員○加納正道

九州産業大学 正員 赤坂順三

東 和 大学 正員 空閑幸雄

1. まえがき 筆者らはこれまでに、重み付差分法により被圧滞水層内における塩水くさび・淡塩境界面の浸透と拡散を、図1に示す解析領域を同じメッシュ幅で解析してきた。¹⁾ しかし、塩水くさび近傍を精度よく解くには、メッシュ幅をさらに小さくしなければならない。一方メッシュ幅を小さくすれば、計算に必要な配列は多大となり、計算時間も増大する。この解決策として、乱流領域における移流拡散の解析で、正方形格子とほぼ同様の精度で解析することのできた、任意形状を有する二次元重み付差分法²⁾で解析することを考え、解析領域を塩水くさび近傍領域とそうでない領域で、メッシュ間隔を変えて解くことにした。このとき、メッシュ間隔が異なる解析領域の境界では不規則格子を形成する。そこで本報では、不規則格子による浸透流方程式の重み付差分法の定め方と、これを用いた定常状態の重み付差分法による等濃度線を、模型実験と比較して示す。

2. 基礎方程式 被圧滞水層内の塩水くさびの浸透流と拡散について、図1に示す x, y の二次元直交座標系で基礎式を考えれば、式(1)、式(2)のように示すことができる。

$$\text{浸透流方程式} : k_1 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + k_2 \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_2 \frac{\rho}{\rho_f} \right) = 0 \quad (1)$$

$$\text{移流拡散方程式} : \frac{\partial c}{\partial t} = d_1 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + d_2 \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} - u_1 \frac{\partial c}{\partial x} - u_2 \frac{\partial c}{\partial y} \quad (2)$$

ここに、 k_1, k_2 : 透水係数、 H : 圧力水頭、 ρ : 流体の密度、 ρ_s : 塩水の密度、 ρ_f : 淡水の密度、 c : 塩分濃度、 u_1, u_2 : x, y 方向の実流速、 d_1, d_2 : x, y 方向の拡散係数である。なお、密度 ρ と濃度 c との関係は、式(3)である。

$$\rho = \rho_f + (\rho_s - \rho_f) \cdot c \quad (3)$$

3. 浸透流方程式のための重み付差分法 不規則格子による浸透流方程式(1)の重み付差分法の定め方について述べる。前報¹⁾同様、式(1)左辺第3項 ($= \partial \{ k_2 \rho / \rho_f \} / \partial y$) は求めようとする圧力水頭 H を含まず、 H とは独立に求められる非同次項である。

そこで、いま簡単のため等方性 ($k_1 = k_2 = k$) を考え、この項を式(4)において、差分等で場所と時間毎に与えることにして式(1)を書き直して式(5)とし、この式を非同次方程式と呼ぶことにする。非同次方程式(5)を重み付差分法で解く方法を以下に説明しよう。

まず、右辺の非同次項 f をゼロとおいた式(6) (こ

こでは同次方程式と呼ぶ) の重み付差分法をもとめる。同次方程式を満足する x, y の多項式を x の $0, 1, 2, \dots, r$ で記せば式

(7) が得られる。簡単のために、 x 方向のみの差分間隔を変えたとき、式

(6) を満足する x, y の増分を $\Delta x = \Delta y = r_1 h$, $\Delta x' = r_2 h$ として、原点のごく近くを考え、 $x = p_1 r_1 h$

(又は $p_1 r_2 h$)、 $y = p_2 r_1 h$ と離散化をほどこす。いま、図2(a)に示す未知時間の3種類7点における差分モデルを考えると、同次形重み付差分式

(8) が得られる。ここで、原点を考える点に移し、式(7)において $r=0, 1, 2$ のときの H の値を式(8)に代入すれば、重み a_1, a_2, a_3 を求める連立方

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\rho}{\rho_f} \right) = f \quad (4)$$

$$k \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = -f \quad (5)$$

$$k \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0 \quad (6)$$

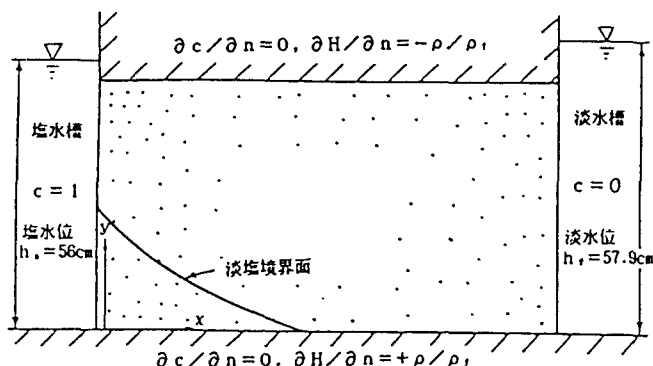


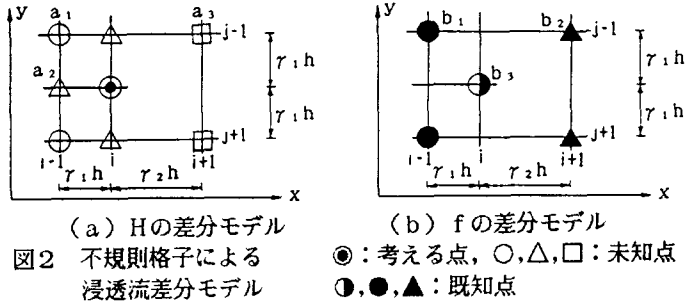
図1 塩水くさび解析領域および境界条件

程式(9)が得られる。次に非同次方程式の重み付差分法について考える。いま、非同次方程式(5)の右辺を次々にある既知関数 f_L ($L=1,2,\dots,M$)でおきかえて得られる式(5)の特殊解の一つをそれぞれ H_L とすれば、式

(5)を満足する f_L と H_L の組み合わせ式(10)を得る。このようにして求めた f_L と H_L の組み合わせを同次方程式同様離散化をほどこし、図(2), (a)

(b)に示す6種類12点における差分モデルを考えると、式(11)の非同次型重み付差分式を得る。ここで、原点を考える点に移し、式(10)において $L=1,3,5$ の f と H の値と連立方程式(9)から求めた a_1, a_2, a_3 の値を式(11)に代入すれば、重み b_1, b_2, b_3 を求める連立方程式(12)がもとまる。なお、 $L=2,4$ の場合には、式(10), (11)および図2の組み合わせで計算される a_1, b_1 にかかる係数はゼロ値となる。

4. 重み付差分法解と模型実験結果との比較 図1に示す解析領域と境界条件のもとで、 x, y の増分を浸透流を $\Delta x = \Delta y = 1.2$, 移流拡散を $\Delta x = \Delta y = 0.6$ として求めた重み付差分法の定常状態の等濃度線を模型実験と比較して図3に示



$$H^{(r)}(x, y) = \sum_{i=0}^{r/2} (-1)^i [b_{r,i} \cdot \frac{\{(x^2 - y^2)/k\}^{r-2i}}{(r-2i)!} \cdot \frac{(x^2 y^2 / k^2)^i}{i!}] \quad (7)$$

$b_{r,i}$: r と i により定まる常数

$$H(i, j) = a_1 \{H(i-1, j-1) + H(i-1, j+1)\} + a_2 \{H(i-1, j) + H(i, j-1) + H(i, j+1)\} + a_3 \{H(i+1, j-1) + H(i+1, j+1)\} \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & \gamma_1^2 D_n & 2(\gamma_2^2 - \gamma_1^2) D_n \\ -8\gamma_1^4 D_n^2 & 3\gamma_1^4 D_n^2 & 2(\gamma_1^4 - 6\gamma_1^2 \gamma_2^2 + \gamma_2^4) D_n^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

ここに、 $h^2/k = D_n$

$$H_L = \frac{x^{L+1} + y^{L+1}}{(L+1)!} \quad (10)$$

$$f_L = - \frac{k(x^{L-1} + y^{L-1})}{(L-1)!} \quad (L=1, 2, 3, \dots)$$

$$H(i, j) = a_1 \{H(i-1, j-1) + H(i-1, j+1)\} + a_2 \{H(i-1, j) + H(i, j-1) + H(i, j+1)\} + a_3 \{H(i+1, j-1) + H(i+1, j+1)\} + b_1 \{f(i-1, j-1) + f(i-1, j+1)\} + b_2 \{f(i+1, j-1) + f(i+1, j+1)\} + b_3 f(i, j) \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 8 & 4 \\ -48\gamma_1^2 h^2 & 24(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) h^2 & 0 \\ 120\gamma_1^4 h^4 & 60(\gamma_1^4 + \gamma_2^4) h^4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \frac{h^2}{k} \begin{bmatrix} 4\gamma_1^2 & 3\gamma_1^2 & 2(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) \\ 4\gamma_1^4 h^2 & 3\gamma_1^4 h^2 & 2(\gamma_1^4 + \gamma_2^4) h^2 \\ 4\gamma_1^6 h^4 & 3\gamma_1^6 h^4 & 2(\gamma_1^6 + \gamma_2^6) h^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (12)$$

す。この図の結果によればかなりよい一致をみることができた。

参考文献

- 1) 加納・空閑・赤坂: 重み付差分法による塩水くさびの拡散解析、第42回年講第2部
- 2) 加納・赤坂・空閑・川村: 不規則境界をもつ二次元重み付差分法、昭和60年度西部支部年講

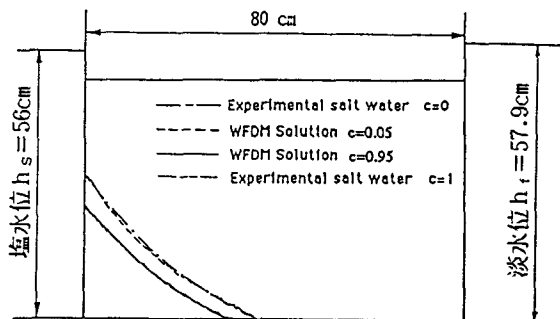


図3 重み付差分法解および模型実験結果