定常流のある開水路往復流の分散係数

長崎大学大学院　学生員 ○山口憲司
九州大学工学部　正会員　粟谷陽一
長崎大学工学部　正会員　古本勝弘

1．まえがき

河川感潮域において拡散物質の一次元的濃度解析を行う場合、分散係数を知ることが必要であるが、その評価式は未だ確立されていない。著者らは、アスペクト比(B/H)が十分大きな開水路等流において往復流と定常流とが重畳した流れで、流れ方向に一定の濃度勾配が保持される場合について分散係数を求めた。[1)] その結果、分散係数D_Lは定常流速U_Fと往復流の代表流速 U_Tとの比(U_F/U_T)と、往復流周期Tと断面内混合に要する特性時間 T'(=B_2/KeHU_T)との比$\circledR$(=T/T')に支配されることが明らかになった。ところで、往復流一週期に対する断面平均濃度Cの支配方程式は、(1)式で与えられ、一週期間で移流流束と分散流束が丁度釣り合い、定常状態が保たれるならば濃度Cは(2)式となり、

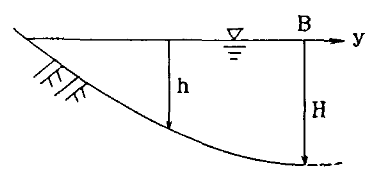
$$\frac{\partial C}{\partial t}+U_F\frac{\partial C}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D_L\frac{\partial C}{\partial x}\right) \qquad (1) \qquad\qquad C=C_0\exp\left(\frac{U_F}{D_L}x\right) \qquad (2)$$

濃度勾配はx方向に一定ではない。x方向濃度勾配が一定でない場合には、一定の場合と異なり、移流速度と横方向拡散により形成される断面内濃度分布はx方向の位置に関係することになり、分散係数に対しても前の解析[1)]とは異なることが考えられる。ここではx方向濃度分布が指数関数で与えられる場合の分散係数を求め、比較を行う。

2．理論

水深hが幅方向に緩やかに変化し、中心線に対して対称な幅2Bの開水路等流を考える。流下方向、幅方向にx、y軸をとる。位置yにおける深さに対する平均流速uは定常流のものに等しいと仮定し、Manning式を用いて、

$$u=h^{2/3}I^{1/2}/n=K_q\ U\ \zeta^{2/3} \qquad (3)$$



図－1

ここに、断面平均流速　$U=(I^{1/2}/n)\int_0^B h^{5/3}dy/\int_0^B h\,dy$

$\eta=y/B$,　　$\zeta=h/H$,　　$K_q=\int_0^1\zeta d\eta/\int_0^1\zeta^{5/3}d\eta$

深さ方向に平均化された物質濃度cの保存式は、横方向拡散係数をεと置き、$\partial c/\partial x \ll \partial c/\partial y$ として、x方向拡散を省略し

$$\frac{\partial c}{\partial t}+u\frac{\partial c}{\partial x}=\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial y}\left(h\varepsilon\frac{\partial c}{\partial y}\right) \qquad (4)$$

ここで、　$\varepsilon=a\,u_*h=K_e\,H|U|\zeta^{3/2}$,　　$K_e=a\,K_q\,n\,g^{1/2}H^{-1/6}$　　とおき，

独立変数(x,t)の代わりに　$\xi=K_eHx/B^2$,　　$\theta=(K_eH/B^2)\int_0^t|U|dt$　　(5)

を導入するとともに、　$c=\hat{c}\ \exp(\lambda\xi)$　(6)　を仮定して、(4)を書き直すと、

$$\frac{\partial\hat{c}}{\partial\theta}+\lambda\frac{U}{|U|}K_q\zeta^{2/3}\hat{c}=\frac{1}{\zeta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\zeta^{5/2}\frac{\partial\hat{c}}{\partial\eta}\right) \qquad (7)$$

U≧0、U≦0　に対する(7)の解をそれぞれ、　$\hat{c}=A\ Y(\eta)\exp(-\sigma\theta)$、　$\hat{c}=B\ \overline{Y}(\eta)\exp(-\overline{\sigma}\theta)$　(8)

とおくと、$Y(\eta)$、$\overline{Y}(\eta)$　が満足すべき式はそれぞれ、

$$\frac{d}{d\eta}\left(\zeta^{5/2}\frac{dY}{d\eta}\right)-\lambda K_q\zeta^{5/3}Y+\sigma\zeta Y=0\ ,\qquad \frac{d}{d\eta}\left(\zeta^{5/2}\frac{d\overline{Y}}{d\eta}\right)+\lambda K_q\zeta^{5/3}\overline{Y}+\overline{\sigma}\zeta\overline{Y}=0 \qquad (9)$$

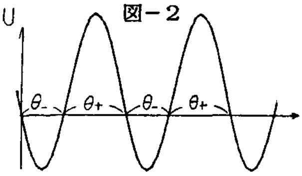
上式は、σ、$\overline{\sigma}$が離散的な特定の値σ_i、$\overline{\sigma}_i$　(i=1,2,...∞)をとるときにのみ境界条件〔η=0,1 において $\zeta^{5/2}(dY/d\eta)=0$〕を満足する解　Y_i,$\overline{Y}_i$　が存在する。従って、$\hat{c}$ は

U≧0 のとき　$\hat{c}=\sum_{i=1}^{\infty}A_iY_i\exp(-\sigma_i\theta)$,　　　U≦0 のとき　$\hat{c}=\sum_{i=1}^{\infty}B_i\overline{Y}_i\exp(-\overline{\sigma}_i\theta)$　　(10)

と表される。係数A_i，B_i を決めるためには、U=0 での濃度の連続条件を使う。U≧0，U≦0 に対するθの増分をそれぞれ，θ_+，θ_-　とおくとき（図－2)、

$$\sum_{i=1}^{\infty}A_iY_i\exp(-\sigma_i\theta_+)=\sum_{i=1}^{\infty}B_i\overline{Y}_i\ ,\qquad \sum_{i=1}^{\infty}B_i\overline{Y}_i\exp(-\overline{\sigma}_i\theta_-)=\Delta\sum_{i=1}^{\infty}A_iY_i \qquad (11)$$

Δは１週期後に元の濃度に一致する時には１となるべき値であるが，λ及び流れの条件θ_+，θ_-によっては$\Delta=1$とはならず、計算実行の都合上導入されたものである。ところで、関数$Y_i,\overline{Y}_i$ ($i=1,2,3\cdots$)にはそれぞれ次の直行条件がある。



図－2

$$\int_0^1 Y_i Y_j \zeta d\eta = 0\ ,\qquad \int_0^1 \overline{Y}_i \overline{Y}_j \zeta d\eta = 0 \qquad [i \neq j] \tag{12}$$

従って、(11)の第１式に $Y_i\zeta$を，第２式に $\overline{Y}_i\zeta$をそれぞれ掛けて積分すると

$$A_i \exp(-\sigma_i \theta_+) \int_0^1 \zeta Y_i^2 d\eta = \sum_{j=1}^{\infty} B_j \int_0^1 \zeta Y_i \overline{Y}_j d\eta\ ,\quad B_i \exp(-\overline{\sigma}_i \theta_-) \int_0^1 \zeta \overline{Y}_i^2 d\eta = \sum_{j=1}^{\infty} A_j \int_0^1 \zeta \overline{Y}_i Y_j d\eta \tag{13}$$

(10)でiを各々有限項とるとすれば、上式はA_i,B_iに関する2i個の連立同次方程式となっているので、A_i,B_iが非自明解を持つためには、それらの係数で作る行列式Dが０でなければならない。従って、流れの条件θ_+,θ_-に対して、$D=0$ かつ$\Delta=1$ を満足させるλとこれに対応する固有値$\sigma_i,\overline{\sigma}_i$ 、固有関数 $Y_i,\overline{Y}_i$ を求めることができれば濃度分布(10)が決定できる。

往復流一週期間における物質流束がない場合は,(2),(6)における指数部を等置して分数係数を得ることができる。

$U_F=\int_0^T U\,dt/T$ ，$|U|_{mean}=\int_0^T |U| dt/T$ 　とおくと、D_Lは次式で表される。

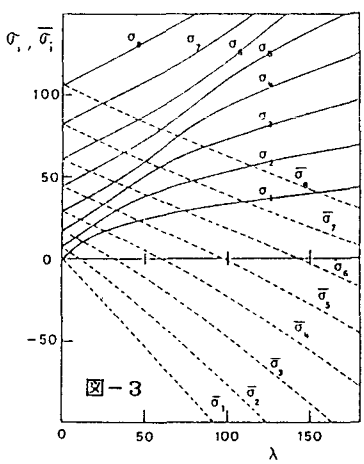
$$D_L \Big/ \left(\frac{B^2}{K_e H} |U|_{mean} \right) = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\theta_+ - \theta_-}{\theta_+ + \theta_-} \tag{14}$$

３．数値計算とその結果

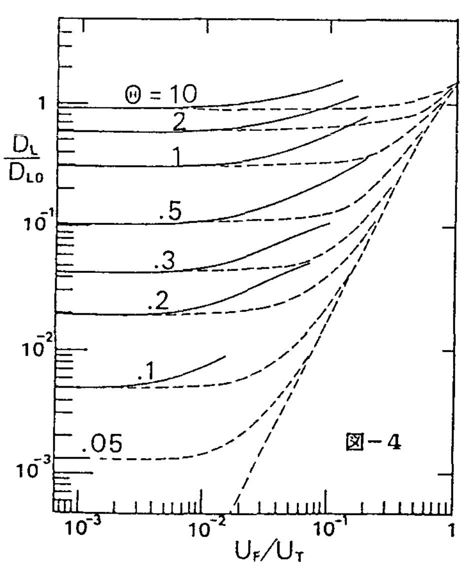
放物形断面 $h/H=(y/B)\cdot(2-y/B)$ の水路に対して計算を行った。断面平均流速を $U = U_F + U_T\cos(2\pi t/T)$ とすると、

$$\theta_+ = \Theta\left(\Psi + \frac{U_F}{2U_T}\right),\quad \theta_- = \Theta\left(\Psi - \frac{U_F}{2U_T}\right),\ \text{ここに},\ \Theta = T\Big/\left(\frac{B^2}{K_e H U_T}\right),\quad \Psi = \frac{1}{\pi}\left(\sqrt{1-(U_F/U_T)^2} + \frac{U_F}{U_T}\sin^{-1}\frac{U_F}{U_T}\right)$$

と表され、分散係数D_LはΘとU_F/U_Tの２つのパラメータに支配されることがわかる。$U_F \to 0$ で $\Theta \gg 1$ すなわち、無限の週期をもつ往復流のみの場合(D_{L0}とおく)の(13)の値は 0.0512 に収束し、x方向に一定の濃度勾配をもつとした解析と一致する。固有値$\sigma_i,\overline{\sigma}_i$と$\lambda$の関係を図－3 にしめす。図－4 には D_L/D_{L0}と U_F/U_T、Θ との関係を示している。図-4中の破線はx方向濃度勾配を一定とした解析結果である。各Θに対して U_F/U_T が小さい領域では前の解析と一致するが、U_F/U_T がある値を超えると両解析に差異が生じてくる。また、U_F/U_T が更に大きくなり１に近づいて行くと解が存在しなくなる。各Θの値に対して U_F/U_T が大きいほどλが大きい流れに対応しており、解が存在しなくなることは U_F/U_T が大きくなると一週期間における移流流束とy方向の拡散流束とが平衡することなく，濃度の週期性が成り立たなくなることを意味している。



図－3



図－4

引用文献　1) Furumoto,Awaya :九州大学工学部紀要, Vol.47, No4, pp.251-259, 1987.