2段階陽解法による移流拡散方程式解の安定性

佐賀大学　学○吉岡　　司
佐賀大学　正　荒牧　軍治
佐賀大学　正　古賀　勝喜
佐賀大学　学　野口　英樹

1．はじめに

移流拡散方程式は湖沼、海湾における汚濁物質の拡散の支配方程式として重要であるばかりでなく、流れ問題の支配方程式であるナビア・ストークスへと発展する基礎方程式としても重要で、多くの研究者により実用的かつ精度のよい数値解析法が提案され、多くの成果を挙げているが、多くの方法は陰解法であり、陽解法はΔｔを非常に小さくとらないと安定性に問題があるとして、実用に用いられることが少なかった。

ところが、湖沼、海湾における移流拡散問題を実際に解くとなると、非常に細かく分割されたメッシュを用いなければならないが、陰解法では１ステップ毎の連立方程式の解法に時間がかかり、必ずしも陽解法が有利とは言えなくなってきた。さらに陽解法は次の時間ステップにおける各点の値を求めるのに前の時刻の値のみを求めるので、これから一般的になると考えられる複数個のｃｐｕを有するコンピューターを用いた解析では大きな威力を発揮するものと考えられる。

川原[1]は、浅海方程式の解法として、集中係数法を用いた２段階陽解法を提案した。この方法は、理論構成が非常に簡便で、かつ精度が相当に期待できる優れた方法であり、今後の移流拡散解析、浅海方程式の解析および流れ解析に大きな威力を発揮するものと期待できる。本研究は、川原が提案した集中係数法を用いた２段階陽解法を１次元２次元移流拡散方程式の有限要素法解析に適用し、その安定性を数値実験により検証しようとするものである。

2．移流拡散方程式の２段階陽解法

１次元移流拡散方程式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = k\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - u\frac{\partial \phi}{\partial x} + Q \qquad (1)$$

１次元線形要素を用いて有限要素化すると、有限要素方程式は次式で与えられる。

$$C\frac{d\phi}{dt} + (K+D)\,\phi - f = 0 \qquad (2)$$

川原は各要素の選択的質量係数マトリックスを定義した。

$$C_e = e\,C_e + (1-e)\,C_e \qquad (3)$$

ただし、C_eは各節点に質量を集中した集中マトリックスであり、C_eは通常のコンシステント・質量マトリックスを示している。

上記の選択的質量係数マトリックスを用いて、次のような２段階陽解法を表すことができる。

$$C\Phi^{n+1/2} = C\Phi^{n} - \frac{\Delta t}{2}(K+D)\,\Phi^{n}$$
$$C\Phi^{n+1} = C\Phi^{n} - \Delta t\,(K+D)\,\Phi^{n+1} \qquad (4)$$

ただしΔｔはｎステップとｎ＋１ステップとの時間間隔を示す。ｎステップにおけるポテンシャルの値が既知であれば、ｎ＋1/2ステップ、ｎ＋１ステップ目の値はマトリックスのかけ算だけで求めることができ、連立方程式を解く必要がないのが本方法の特徴である。

２次元問題も、３角形線形要素を用いると選択的質量係数マトリックスが簡単に定義でき、式（４）で示される、２段階陽解法を用いて解くことができる。

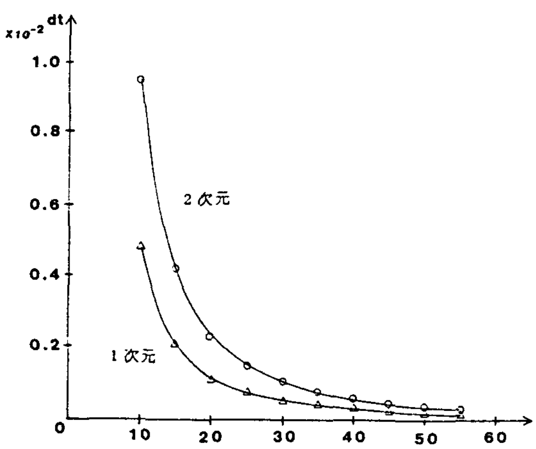
3．解の安定性と精度

図－１及び図－２の領域０－１区間の１次元、２次元有限要素モデルを用いて解の求められてい

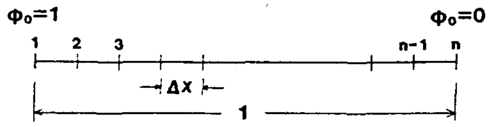
る例題を解析し、解の安定性と精度を検討した。初期条件ϕ（x，t）＝０、境界条件ϕ（０，t）＝１、ϕ（１，t）＝０を与えた場合の厳密解が得られているので、拡散係数、流速、Δｔ，Δｘをそれぞれに変化させた場合の解の安定性と精度を検討することができる。移流拡散方程式に２段階陽解法を適用すると、発散さえ起こさないように注意すれば、きわめて精度のよい解を得ることができる。表－１は発散する限界と、よい精度が得られる最小のΔｔであり、その間のΔｔで計算するとわずかに解が振動する。しかし、表からも明らかなようにその領域は無視できるほど小さいので、２段階陽解法による移流拡散方程式の解は、Δｔが大きいと発散するが、Δｔを小さくして収束領域に入ると、突然精度のよい解を得る領域にはいる。図－３、４は１０分割、４０分割したときの計算値（●印）厳密解（実線）を示したものであるが、計算値は理論解とよく一致する。本計算法は、分割を細かくするにしたがって、発散

限界Δｔも小さくなるのが特徴である。図－５は１、２次元モデルにおける発散限界Δｔを示しているが、分割数のほぼ逆数に比例して発散限界Δｔは小さくなっている。

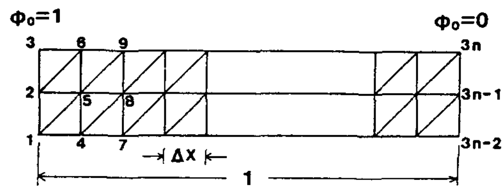
移流拡散方程式の有限要素法として、２段階陽解法が安定でかつ精度のよい解法であることが明らかになった。



図－５　発散限界Δｔ



図－１　１次元モデル

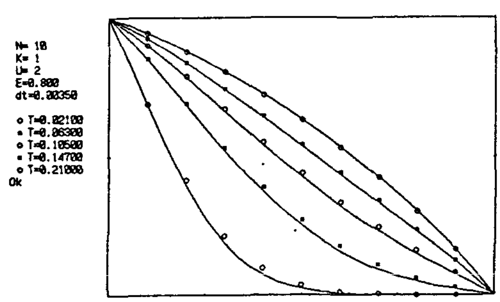


図－２　２次元モデル

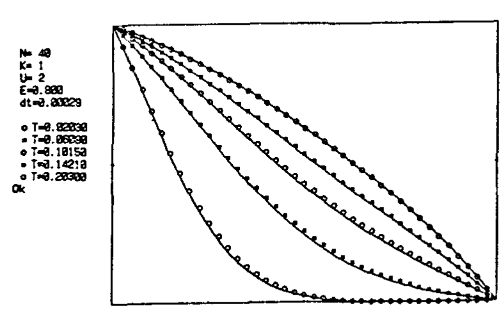
一次元

分割数	時間分割　Δｔ	
	一致	発散
１０	0.0048	0.0051
１５	0.0021	0.0023
２０	0.0011	0.0013
２５	0.00075	0.00080
３０	0.00052	0.00056
３５	0.00038	0.00041
４０	0.00029	0.00032
４５	0.00023	0.00025
５０	0.00018	0.00020
５５	0 00015	0.00017

表－１　発散・収束するΔｔ



図－３　１０分割



図－４　４０分割