

非線形移流項の高精度数値計算

佐賀大学 学○福寿康人 正 波辺訓甫 正 大串浩一郎
九州大学 正 小松利光 正 朝位孝二

1. 序

開水路における段波の様な急変流を取り扱うには、運動量保存式に含まれる非線形移流項を正確に評価する必要がある。しかしながら、その数値的取り扱い是非常に困難である。本研究では、線形移流項の計算に用いられた 6-point スキームを非線形の場合へ適応し、非線形移流項も高精度で計算できることを示す。

2. 計算法の記述と解析

1 次元の Burger's 方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

ここで、 u : 流速 v : 拡散係数

(1) 式の特性曲線表示は

$$\frac{dx}{dt} = u(x, t) \quad (2)$$

上で

$$\frac{du}{dt} = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3)$$

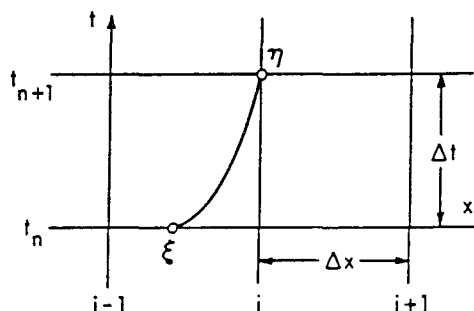


図-1

である。スプリット・オペレータ・アプローチでは、移流と拡散の計算を各時間ステップ毎に交互に行う。すなわち、

〔移流の計算ステップ〕

$$\frac{dx}{dt} = u(x, t)$$

上で

$$\frac{du}{dt} = 0 \quad (4)$$

〔拡散のステップ〕

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (5)$$

ここでは、移流の計算ステップのみについて、以下計算手順を述べる。

(4) 式は特性曲線 (2) 式上で流速 $u = \text{const.}$ を意味している。従って、図 1 に示すように、この特性曲線の出発点と到着点の座標を ξ , η とすれば、次式が得られる。

$$u_i^{n+1} = u_\eta = u_\xi \quad (6)$$

6-point method は流速 u_ξ を既知の 6 格子点の流速 u_j^n ($j=i-3, i-2, i-1, i, i+1, i+2$) の値で内挿する方法である。

$$u_\xi = a_0 + a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 + a_3 \alpha^3 \quad (7)$$

ここで、 $\alpha = (x_i - \xi) / (x_i - x_{i-1})$ 、 $a_0 - a_3$ は流速 u_j^n ($j=i-3, i-2, i-1, i, i+1, i+2$) により求まる係数である。 ξ が未知であるため α も未知であり簡単に (7) 式を用いることはできない。そこでまず α の近似値を風上差分スキームで次のように与える。

すなわち、

$$\overline{u}_i^n = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{(u_i^n)^2}{2} - \frac{(u_{i-1}^n)^2}{2} \right) \quad (8)$$

$$\overline{\alpha} = \frac{\overline{u}_i^n \Delta t}{\Delta x} \quad (9)$$

(9) 式を (7) 式に代入して $\widehat{u}_i^n$ が求まる。精度向上のため (7) 式と (8) 式の荷重平均をとる。
すなわち、

$$u_i^n = \kappa \overline{u}_i^n + (1 - \kappa) \widehat{u}_i^n \quad (10)$$

ここで、荷重 κ は、多くの数値実験の結果 $\kappa = 0.72$ が最適であることがわかった。

3. モデル計算例

$\kappa = 0$ (非線形純粋移流) の場合に、下流へ伝播する急峻なフロントについてモデル計算を行った。
初期条件が次式のとき、

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{for } (x - x_0) < 0 \\ 0 & \text{for } (x - x_0) \geq 0 \end{cases}$$

解析解は次のように求まっている。

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{for } (x - x_0)/t \leq 1/2 \\ 0 & \text{for } (x - x_0)/t > 1/2 \end{cases}$$

図-2、図-3は各々 $\Delta x = 0.01$, $\Delta t = 0.005$ のときの解析解と数値計算結果である。Lax-Wendroff のスキームでは、フロントの上流側に“スパイク”状の振動が生じている。また、Holly-Toda のスキームでは、 $\Delta t = 0.01$ のとき位相誤差が生じている。一方、本研究で提案しているスキームでは、位相誤差、振幅誤差共に低く抑えられていることが分かる。

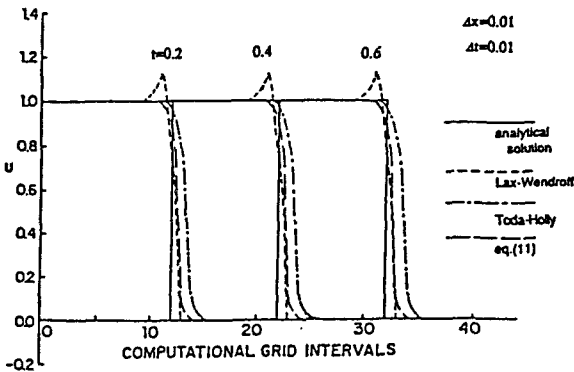


図-2

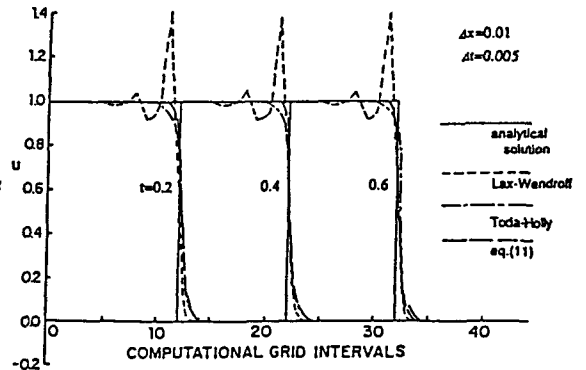


図-3