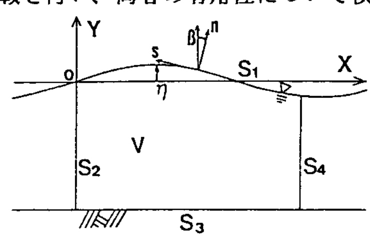
有限振幅波動解析におけるF.E.MとB.E.M
－仮想境界処理と計算精度－

熊本大学 大学院　学生員○金　南亨
熊本大学 工学部　正会員　滝川　清
熊本大学 工学部　正会員　田渕 幹修

1。まえがき　複雑な海底形状を有する沿岸での波の非線形挙動を、より現実的な状況の下で解析する典型的な数値計算手法として、有限要素法(F.E.M)がある。この方法は、多くの研究者により独自の工夫が加えられ、得られる解も十分な精度を保つことが確認された[1]。一方、同様の非線形波動問題への境界要素法(B.E.M)の適用研究も数多く、[2),(3),(4)]その有用性が主張されている所である。B.E.M 解析に際しても解析上の仮想境界処理が問題となるが、本研究では、これの簡単な処理方法を示し、従来のB.E.Mを波の有限振幅性を含む、より一般的状況での波動問題に適用拡張するものである。また、計算精度および計算時間等に関し、F.E.M解析結果との比較を行い、両者の有用性について検討を加えたのでここに報告する。



図－１ 解析領域

2。有限振幅非定常波動解析　座標系を図-1のように定義し、２次元の領域での流体の運動を考える。流体は非圧縮、非粘性流体とし、流体運動を非回転と仮定する。解析領域Vは水面変動量$\eta(X,t)$の関数である。流体は速度ポテンシャル$\phi(X,Y,t)$を有し、時間をｔ、重力加速度をgと表すと運動の支配方程式は解析領域Vに関するラプラス方程式になる。このときφおよび水面変動量ηに関する基礎方程式と境界条件は次のように表される。

$$\partial^2\phi/\partial X^2+\partial^2\phi/\partial Y^2=0 \quad \text{(in V)} \quad (1)$$

$$\partial\phi/\partial n=\cos\beta\cdot\partial\eta/\partial t \quad \text{(on S1)} \quad (2)$$

$$\partial\phi/\partial t+1/2\cdot[(\partial\phi/\partial n)^2+(\partial\phi/\partial S)^2]+g\cdot t=0 \quad \text{(on S1)} \quad (3)$$

$$\partial\phi/\partial n=\partial\Phi/\partial n \quad \text{(on S2,S4)} \quad (4)$$

$$\partial\phi/\partial n=0 \quad \text{(on S3)} \quad (5)$$

式(4)は左右の仮想境界での速度ベクトルを意味し、Mass-Fluxの連続性を規定するものである。φが調和関数であることから、式(1)はグリーン公式を、また式(3)は重みつき残差法を適用する。これらについては文献[3)]が詳しい。一次要素を用いて離散化すると$\Delta\phi$と$\Delta\eta$に関する連立一次代数方程式が導かれる。これを解き、得られた解を$\phi=\phi_0+\Delta\phi$、$\eta=\eta_0+\Delta\eta$に代入すれば、時刻$t_0+\Delta t$における解が求められる。

3。仮想境界処理　入射側境界S2では一般に既知の入射波と未知の反射波が存在し、また通過側S4では未知の通過波が存在する。微少振幅波動の場合にはこれ等の未知成分の関数形が確定し、周期関数として解析可能である。しかしながら、有限振幅波動の場合、波成分の一般形を厳密に定める事は困難であって、非定常問題としての取扱が必要となる。ここでは簡便な方法として仮想境界での速度分布を水面変動の関数として取り扱うものである。即ち、たとえば、S4境界に対する式(4)の条件を

$$\partial\Phi/\partial n=\sigma\cdot[\mathrm{COSh}\ K(h+Y)/\mathrm{SINh}\ Kh]\cdot(\eta_0+\Delta\eta) \quad (6)$$

とする。これは水面変動記録から内部流速を推算するDeanの流れ関数法の第1項を用いた事に相当する。以下の適用計算ではPistonの造波問題を対象として通過側境界での式(6)の妥当性を検討している。

4。数値計算例　表-1に示した実験条件と同様、計算の初期値としては静水とし、すべての点で0を与え、造波板の位置$\xi_0=0$の状態から計算を開始した。要素の分割は、各Caseとも水深方向に10分割、X軸方向には、Case1,Case2の場合$\Delta X/L=1/20$として、40分割の2波長区間、またCase3の場合には$\Delta X/L=1/40$の60分割で1.5波長区間を取った。すなわち、各Caseの実験区間と同一となるように決めて、$\Delta t/T=1/40$と固定した。通過位置での仮想境界の処理も、これらの図-2から明らかなように、通過部でなめらかに波が通過していることが示され、また、後の図-3の各通過位置での実験波形との比較からも、本計算法の妥当性を実証することができる。図-2に示すように、Case1の正弦的な水面波形からCase3のSolitonの発生の状態まで本計算結果は実験結果と極めて良く一致し、本計算手法が十分な精度で水面変動を計算できることが実証できた。次に、時間刻み$\Delta t/T$を固定して要素の水平分割刻み$\Delta X/L$を変化させてその精度を検討してみる。表-1のCase 3を計算の対象とした。図-4は時間刻み$\Delta t/T=1/40$と固定しておいて$\Delta X/L=10,20,30$と変化させたもので実験値を・印ﾌﾟﾛｯﾄして比較したも

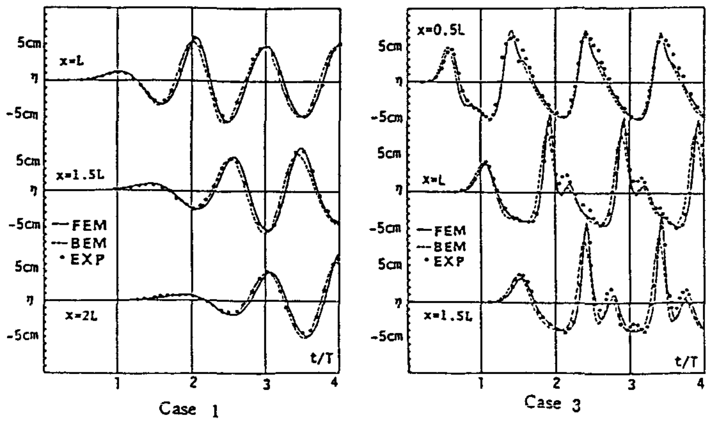
のである。これを見るとΔX／Lは数多く分割した方がよりよい精度が得られることが分かる。水深方向には分割刻みをΔY／h=10,4,2,1に変化させたが波形に影響がなく、一定水深の時には少ない分割でよい事が分かった。**図-5**はCase3を計算対象とし、X方向分割ΔX／L=1／20に固定してΔt／T=10,20,40と変化させてそれぞれ計算した結果で実験値を・印ﾌﾟﾛｯﾄし、比較したものである。ΔX／Lを固定させてΔt／Tを変化させた場合、時間刻みは数多く分割すればする程よりよい精度が得られることが分かるが、実用的にはΔX／L≦1／20、Δt／T≦20程度で十分である。計算の安定性解析のためCourant条件を満たす必要がある。**表-2**は**図-1**のModelを**表-1**の条件のもとでF.E.MとB.E.Mの計算時間を比べたものである。ΔX／L、Δt／Tの分割状況は両者同一にしているが、B.E.Mでは接点数に等しいFull-Matrixを解く為、Band-Matrixを解くF.E.Mに比し、1.5～3倍の演算時間を要することが分かる。（いずれもFACOM M-780使用）

表－1　実験条件

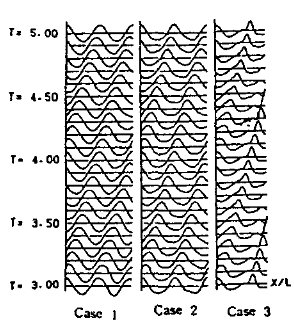
実験Case	水深 hcm	周期 Tsec	Piston全振幅 2ξcm	測　点	相対水深 h/L	波　高 Hcm(1.5L)
Case 1	80	2.0	10.0	L,1.5L,2L	0.128	9.7
Case 2	60	2.5	19.0	L,1.5L,2L	0.0615	12.7
Case 3	40	4.1	34.0	0.5L,L,1.5L	0.0152	14.3

表－2　計算時間比較

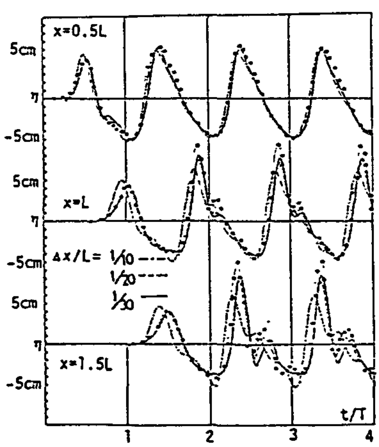
計算Case	計算方法	接点数	演算回数	計算時間(sec)
Case 1	F.E.M	451	201	26.08
	B.E.M	100	201	43.74
Case 2	F.E.M	451	201	26.18
	B.E.M	100	201	43.98
Case 3	F.E.M	671	201	36.15
	B.E.M	140	201	105.44



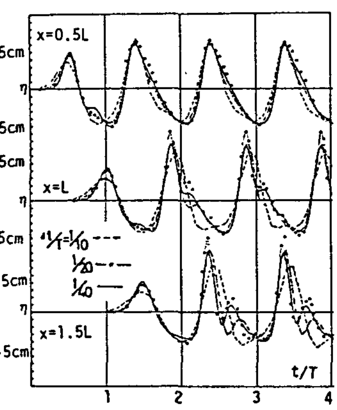
図－３　ピストン型造波による波



図－２　空間波形の時間変動



図－４　要素の分割と空間波形



図－５　時間差分間隔と空間波形

５．あとがき　仮想境界処理を含む非線形波動問題をB.E.M解析し、解析手法の妥当性を検証した。F.E.Mと比較の結果、同一の分割状況ではB.E.Mの方が演算時間は多大となるが、精度上は少ない分割数でも実用上十分な結果が得られることが分かった。

参考文献　(1) 滝川 清：有限要素法による浅海波の変形特性に関する研究、京都大学学位論文、1983　(2)井島 武士・永田 修一：周辺積分と摂動展開法による非定常有限振幅波の数値解析、第27回海講、1980　(3) 中山 司：積分方程式による自由表面問題の非線形解析、第1回 流れの有限要素法解析シンポジウン、日科技連、1979　(4) 大山 巧：境界要素法による非線形孤立波の反射および作用波力の解析、第32回海講、1985