

定常非線形波の境界値問題解析

九州大学 学生員○村上啓介

九州大学 正 員 吉田明德 小島治幸

高松工業高等専門学校 正 員 鶴本良博

1. まえかき 非定常の波動境界値問題にクリーン公式を用いて解析する方法はすでにいくつかの解析例が示されている¹⁾。しかし、定常問題に対してこれらの非定常解析法を用いることには、定常状態に達するまでの計算時間が著しく長くなること、計算境界における波の通過条件がわからないことから計算領域を大きく取らざるを得ないこと、および計算誤差の累積等の問題がある。本文では有限振幅波と構造物の相互干渉を定常境界値問題として解析する方法を示し、2次のオーターのストークス波について、没水構造物による波の変形の計算を行った結果について述べる。

2. 理論解析 図-1に示すように、一定水深 h の海域に、 x の正方向から (P) 次の有限振幅波(ストークス波)が入射する場合を考える。一次のオーターの波(微小振幅波)の振幅を ε_0 、波数を k 、角周波数を σ 、領域(0)に対する外向き法線を ν とする。速度ポテンシャル $\phi(x, z, t)$ 、水面波形 $\zeta(x, t)$ は微小パラメーター $\varepsilon(\varepsilon = h \varepsilon_0)$ によって次式のように級数展開されるものとする。

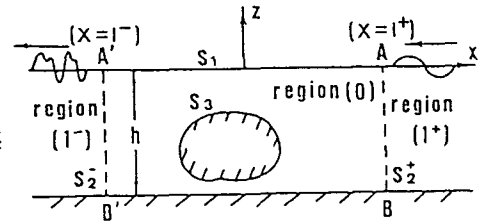


図-1 領域の分割

$$\phi(x, z, t) = \frac{\sigma}{k\sigma} \cdot \{ \varepsilon \phi_1(x, z, t) + \varepsilon^2 \phi_2(x, z, t) + \dots \} \quad \dots(1)$$

$$\zeta(x, t) = \frac{1}{h} \cdot \{ \varepsilon \eta_1(x, t) + \varepsilon^2 \eta_2(x, t) + \dots \} \quad \dots(2)$$

また、 ε^p の各オーターのポテンシャル関数 $\phi_p(x, z, t)$ 、水面波形 $\eta_p(x, t)$ が基本周波数 σ の調和成分の和として次式のように表されるものとする。

$$\phi_p(x, z, t) = \text{Re} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_p^{(n)}(x, z) \cdot \exp(in\sigma t) \right], \quad \eta_p(x, t) = \text{Re} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \eta_p^{(n)}(x) \cdot \exp(in\sigma t) \right] \quad \dots(3)$$

$O(\varepsilon)$ の入射波は単一角周波数 σ を持つ微小振幅波であるから、(1)式の数値ポテンシャル $\phi(x, z, t)$ は次式で表されることになる。

$$\phi(x, z, t) = \frac{\sigma}{k\sigma} \cdot \text{Re} \left[\varepsilon \phi_1^{(1)}(x, z) \cdot \exp(i\sigma t) + \varepsilon^2 \{ \phi_2^{(0)}(x, z) + \phi_2^{(2)}(x, z) \cdot \exp(i2\sigma t) \} + \dots \right] \quad \dots(4)$$

これらのポテンシャル関数に対する水表面での境界条件を $O(\varepsilon)$ の $\phi_1^{(1)}$ 、 $O(\varepsilon^2)$ の $\phi_2^{(0)}$ 、 $\phi_2^{(2)}$ に関し示すと次式のようにになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi_1^{(1)}}{\partial z} - \frac{\sigma^2}{g} \phi_1^{(1)} &= 0 & \frac{\partial \phi_2^{(0)}}{\partial z} &= \frac{1}{kg} \cdot \frac{\eta_1^{(1)}}{2} \cdot \{ \sigma^2 \phi_z^* + g \phi_{xx}^* \} \\ \frac{\partial \phi_2^{(2)}}{\partial z} - \frac{(2\sigma)^2}{g} \phi_2^{(2)} &= -\frac{1}{k} \cdot \{ \phi_{xx}^* + \phi_{zz}^* \} + \frac{1}{kg} \cdot \frac{\eta_1^{(1)}}{2} \cdot \{ \sigma^2 \phi_z + g \phi_{xx} \} \end{aligned} \right\} \quad \dots(5)$$

よって、領域 (1^-) 、 (1^+) においてこれらの水面条件を満足するラプラス方程式の解より、境界面 S_2^* における境界条件は1次及び2次のオーターの進行波に関する未定係数を $O(\varepsilon)$ では A, B 、 $O(\varepsilon^2)$ では $A^{(2)}$ 、 $B^{(2)}$ とし $O(\varepsilon^2)$ についての明示と次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \phi_2^{(2)} &= A^{(2)} \cdot \exp(-ik^{(2)}l^+) \cdot Z(k^{(2)}z) + i \cdot a_s \cdot \{ \exp(i2kl^+) - 4^2 \cdot \exp(-i2kl^+) \} \cdot Z(2kz) + i \cdot b_s \cdot A \\ \frac{\partial \phi_2^{(2)}}{\partial z} &= -ik^{(2)} A^{(2)} \cdot \exp(-ik^{(2)}l^+) \cdot Z(k^{(2)}z) - 2h \cdot a_s \cdot \{ \exp(i2kl^+) - 4^2 \cdot \exp(-i2kl^+) \} \cdot Z(2kz) \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 \phi_2^{(2)} &= B^{(2)} \cdot \exp(ik^{(2)}l^-) \cdot Z(k^{(2)}z) + i \cdot a_s \cdot B^2 \exp(i2kl^-) \cdot Z(2kz) & (x=l^+) \\
 \frac{\partial \phi_2^{(2)}}{\partial \nu} &= -ik^{(2)}B^{(2)} \cdot \exp(ik^{(2)}l^-) \cdot Z(k^{(2)}z) + 2k \cdot a_s \cdot B^2 \exp(i2kl^-) \cdot Z(2kz) & (x=l^-) \\
 \phi_2^{(0)} &= 0 & (x=l^+) \\
 a_s &= -\frac{3}{8} \cdot \frac{\sigma^2}{kg} \cdot \frac{\cosh(2kh)}{\sinh^4(kh)} \quad , \quad b_s = \frac{\{3 \cdot (\sigma^2/g)^2 + k^2\}}{4 \cdot k(\sigma^2/g)^2} \quad , \quad \frac{(n\sigma)^2}{g} = k^{(n)}h \cdot \tanh(k^{(n)}h)
 \end{aligned} \tag{6}$$

一方、領域(0)のポテンシャル関数はクリーンの定理より次式で表される。

$$\phi(x) = \frac{1}{\alpha} \left\{ \phi(x_b) \frac{\partial G(r)}{\partial \nu} - \frac{\partial \phi(x_b)}{\partial \nu} G(r) \right\} ds \dots (7)$$

従って、まず $O(\varepsilon)$ について(7)式を解き、ついで $O(\varepsilon)$ の解を(6)式に用いて、 $O(\varepsilon^2)$ の $\phi_2^{(2)}$ と $\phi_2^{(0)}$ について(7)式を解くことにより、1次と2次のオーターまでのポテンシャル関数が決まる。

3. 数値計算例 解析例として、海底面上にある半径 d の半円による波の変形の非線形性を調べた結果を図-2に示している。図は $kh=1.4$ 、通過側の地点 $x/h=-4$ における時間波形で、半円の半径を $d/h=0.4, 0.6, 0.8$ と変化した場合の $O(\varepsilon)$ の波と $O(\varepsilon^2)$ の波の入射波の振幅に対する振幅比を示している。このときの水表面の分割要素長は、1次と2次の各モードの波長に対してそれぞれ約1/30, 1/10である。図-2(a),(b),(c)を比較すると、半径が大きくなる半円の先端が水面に近づくにつれて2次のオーターの波が増大し、 $d/h=0.8$ の場合は1次のオーターの通過波の振幅に対する2次のオーターの通過波の振幅の比は75%程にもなることがわかる。

4. あとがき 非定常・非線形問題の解析法を用いて定常問題を解析するのに比べて、計算容量、計算時間が極めて短く、かつ誤差の累積等の問題も少ないため、定常非線形問題の有効な解析法であるといえる。条件によってはさらに高次のオーターも無視できない場合もある²⁾。引き続き高次のオーターについても解析を行う予定である。

参考文献

- 1) 井島・永田: 周辺積分と摂動展開法による非定常有限振幅波の数値解析。第27回海岸工学講演会, 1980
- 2) 小島・井島・長野: 水平板による波の分裂に関する実験的研究。九大工学集報, vol.61, No.5, 1988

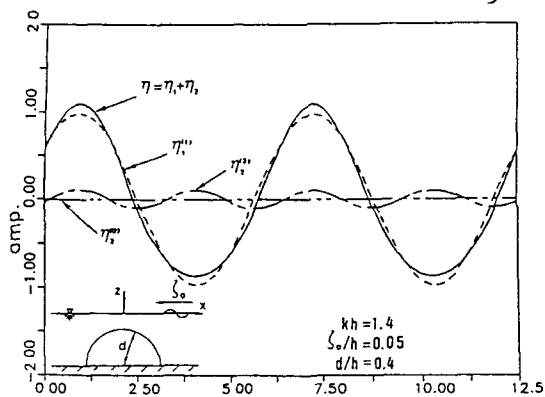


図-2(a) $\eta(x, t)$ の時間変動

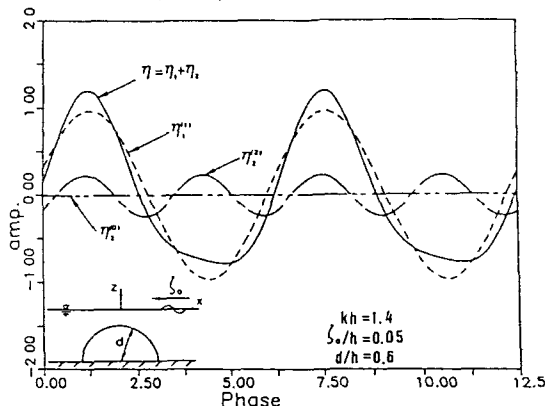


図-2(b) $\eta(x, t)$ の時間変動

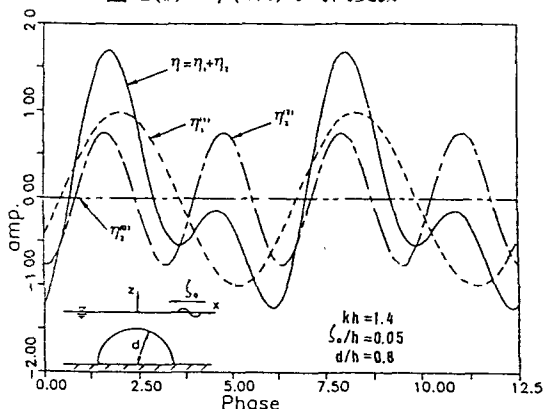


図-2(c) $\eta(x, t)$ の時間変動