波動境界値問題におけるポテンシャル接続法の直接解法について

高松高専　正会員　○鶴本良博
九州大学　正会員　　吉田明徳　小島治幸

1．まえかき　ポテンシャル接続法（領域分割法）は、波浪の境界値問題の一つの有力な解析手法であり、これまで、種々の海岸構造物の防波機能等の解析に用いられてきている。しかしながら、従来のポテンシャル接続法は、未定係数に関する連立一次方程式を導く際に直交関数に関する積分演算を行うことが必要で、そのため理論式の展開とその表示は煩雑であり、しかも、そのためか適用は著者らの知る限り線形問題に限られている。

本論文は、連続条件として境界面上に取った計算点において、隣合う領域の速度ポテンシャル（およびその法線微分）か一致することを規定することにより、直交関数に関する積分演算を行う事なく"きわめて簡単かつ精度よく"未定係数か決定できる事（直接解法）を示すものである。

2．従来の方法と直接解法　図-1に示すような、不透過の潜堤にx軸の正の方向より振幅ζ、角周波数σの微小振幅波か入射する場合を例に説明する。

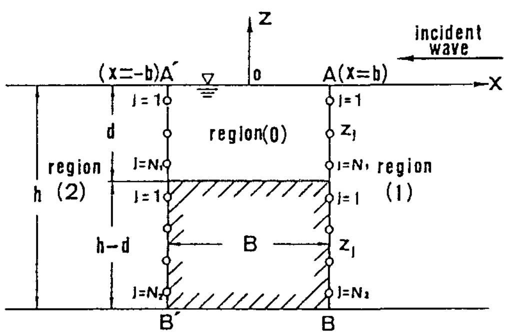

図-1 領域分割図と計算点

まず図-1中の各領域における速度ポテンシャルを$(g\zeta/\sigma)\phi(x,z)\exp(i\sigma t)$，(i=0,1,2) と表すことにすると、関数$\phi_i(x,z)$は一般に次の未定係数を含んだ形の無限級数で表される。

$$\phi_i(x,z)=\sum_{n=0}^{\infty}A_i^{(n)}(x)Z_i^{(n)}(z)\quad (i=0,1,2)\ (1)$$

上式で$A_i^{(n)}(x)$は未定係数$(C_i^{(n)},D_i^{(n)})$を含む関数であり、$Z_i^{(n)}(z)$は、各領域の水面と水底面の間で直交性を有する関数である。(1)式で表される速度ポテンシャルは、各領域の水面と水底の境界条件を満足するラプラス方程式の一般解であり、未定係数は、となり合う領域の境界面における速度ポテンシャルとその法線微分の連続条件より決められることになる。

$$\phi_i=\phi_0\qquad (x=\pm b;-d\leqq z\leqq 0)\qquad (2)$$

$$\partial\phi_i/\partial x=\begin{cases}\partial\phi_0/\partial x & (x=\pm b;-d\leqq z\leqq 0)\\ 0 & (x=\pm b;-h\leqq z\leqq -d)\end{cases}\qquad (3)$$

（従来の方法）上記のとなり合う領域の境界面の連続条件式(2)に(1)式のϕ_0, ϕ_iを代入し、関数$Z_0^{(n)}(z)$が$(-d\leqq z\leqq 0)$で直交性を有することを利用すると、(2)式より、未定係数の関係を規定する次の形の一次関係式か得られる。

$$\alpha_n A_0^{(n)}(b)=\sum_{n=0}^{\infty}A_i^{(m)}(b)\int_{-d}^{0}Z_i^{(m)}(z)Z_0^{(n)}(z)dz$$

$$(i=1,2)\qquad (n=0,1,2,..)\ (4)$$

また(3)式からも同様の未定係数に関係する一次関係式か得られから、これらを連立して解くことにより未定係数を決めることができる。これが従来ポテンシャル接続法と呼ばれる解析法の概略である。この方法は、(2)と(3)式の連続条件が成り立つ事を直接規定しているのではなく、隣合うポテンシャル（およびその法線方向微分値）の自乗誤差が境界面上で全体として最小となる（平均収束する）ように未定係数を決定しようとする事にほかならない。

（直接解法）境界面上に異なるzの値の計算点を取りその計算点上で(2)式と(3)式が成り立つ（点収束する）事を規定することによっても未定係数に関する一次関係式を得ることが出来る。すなわち、図-1に示すように境界面上にN_1，N_2個の点z_jを取り、各点において連続条件か成り立つこととすると(2)，(3)式より次式を得る。

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_i^{(n)}(b)Z_i^{(n)}(z_j)=\sum_{m=0}^{\infty}A_0^{(m)}(b)Z_0^{(m)}(z_j)\qquad (j=1,..N_i)\quad (6)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\bar{A}_1^{(n)}(b)Z_1^{(n)}(z_j)=\begin{cases}\sum_{m=0}^{\infty}\bar{A}_0^{(m)}(b)Z_0^{(m)}(z_j) & (j=1,\ldots,N_1)\\ 0 & (j=1,\ldots,N_2)\end{cases} \quad (7)$$

境界ABにおいて、(6)式はN_1個の各z_jの値について成り立ち、(7)式は(N_1+N_2)個の各z_jの値について成り立つから両式は未定係数$(C_1^{(n)}, C_0^{(n)}, D_0^{(n)})$に関する$(2N_1+N_2)$個の一次関係式を与えることになる。境界A'B'においても、同様に未定係数$(C_2^{(n)}, C_0^{(n)}, D_0^{(n)})$に関する$(2N_1+N_2)$個の一次関係式が得られる。従って、級数の打ち切り項数n^*, m^*を$n^*+1=N_1+N_2$、$m^*+1=N_1$に取り、これらを連立して解くことによって未定係数を決めることが出来る。この方法によれば直交関数に関する煩雑な積分を行う必要はなく、各流体域における速度ポテンシャルの一般解が与えられれば、それを(2)と(3)式の連続条件式に用い、水深方向の変数zの値を変えて得られる未定係数に関する一次関係式を連立して解けばよいだけである。

<u>3. 直接解法の解の精度</u> 直接解法の妥当性と解の精度を検討するため、従来の方法と直接解法による解の比較を行った。没水の水平版の場合には水平版下部の領域の速度ポテンシャルが新たに加わるが、これは没水版底面と水底面の間で直交性を有するフーリエ級数で展開しておく。図中実線で示したのが従来の方法、四角と三角が直接解法による解である。図-2は反射率k_Rと通過率k_Tについて両解法の解を比較したもので、図-2(a)の水平版の場合には、それぞれの解法による解が有効数字3桁までは完全に一致している。図-2(b)の矩形潜堤の場合には解法の違いによる差異が見られるが、この場合も実用上はまったく同じ解を与えているといえる。いずれがより厳密な解であるかの判定は、境界面における連続条件(2),(3)式の満足の程度によって判断される。このため矩形潜堤の境界面ABにおける速度ポテンシャルの法線微分値を隣合う領域(0),(1)の速度ポテンシャルを用いてそれぞれ算定し、両者の自乗誤差ε^2を求めた結果を図-3に示している。これを見ると直接解法の方が自乗誤差がkhの値によらず小さく精度のよい解がえられている。

<u>4. あとがき</u> 直接解法によれば、各領域において、速度ポテンシャルの級数展開が得られれば、実質的に問題は解けたことになる。直交関数に関する積分等の数式の展開は必要なく、理論式と計算プログラムはきわめて簡単明瞭である。しかも解の精度は従来の方法よりも良い。この"簡単さ"を再度強調しておきたい。このため、例えば直接解法を摂動法と併用して、有限振幅波に関する波動境界値問題の解析に用いることも容易である。

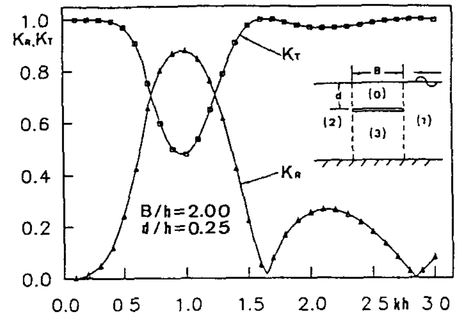

図-2(a)没水水平版

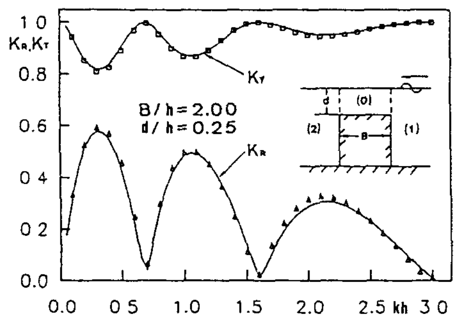

図-2(b)不透過潜堤

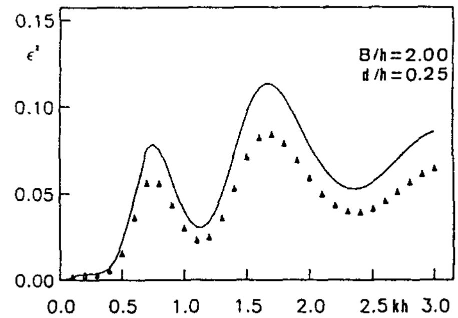

図-3 境界ABにおける$\partial\phi/\partial x$の連続条件の自乗誤差

参考文献:(1)井島:最近の波浪理論における境界値問題の解法とその応用,1971年水工学研修会講義集
(2)吉田他:波動境界値問題におけるポテンシャル接続法の直接解法,九大工学集報法第62巻(投稿中)