

等価線形化法による非線形系の不規則応答解析

長崎大学工学部○学生員 竹下 渡

長崎大学工学部 正 員 岡林 隆敏

1. はじめに

不規則外力が作用する非線形系の解析には、摂動法、等価線形化法などの準線形的な手法が適用されている。このような解法で、定常および非定常応答解析を行なうためには、スペクトル理論あるいはグリーン関数の理論が用いられている。このような解析では、外力のスペクトルが複雑になると解析が極めて煩雑になり、解かれる問題に限界がある。近年、伊藤形の確率微分方程式を基礎とした、効果的な解析が行なわれるようになってきている (1), (2), (3)。本研究では、Duffingの方程式に白色雑音と狭帯域過程でモデル化した外力が作用した場合の応答の分散を求めた。構造-荷重系を伊藤形の方程式で定式化して、等価線形化した。また、この系の高次モーメント方程式を誘導し、高次キュムラント打ち切り近似を用いた解析も行った。

2. 非線形系と不規則外力のモデル

非線形方程式として、正規性不規則外力 $r(t)$ を受けるDuffingの方程式を考える。

$$\ddot{y}(t) + 2h\omega\dot{y}(t) + \omega^2(y(t) + \epsilon y^2(t)) = r(t), \quad y(t_0) = y_0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 ω は固有振動数、 h は減衰定数および、 ϵ は非線形のパラメーターである。任意の相関を有する正規定常確率過程は、正規性白色雑音 $N_z(t)$ を入力とする確率微分方程式の定常解過程として表すことができる。

$$r(t) = CZ(t), \quad Z(t) = AZ(t) + N_z(t) \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 $N_z(t)$ は平均値0で、自己相関関数は $E[N_z(t_1)N_z(t_2)^T] = Q\delta(t_1 - t_2)$ で表される。なお $E[\cdot]$ は集合平均のための演算子である。ここで、構造系と荷重系を合成した変数

$$X(t) = [y(t) \quad \dot{y}(t) \quad z(t) \quad \dot{z}(t) \quad \dots \quad z(t)^{(n)}]^T \quad \dots\dots\dots (3)$$

を導入する。さらに、白色雑音過程は、Wiener過程の形式的な微分であることを考えると、(1)(2)(3)式より、構造-荷重系は、次の伊藤型の確率微分方程式で表される。

$$dX(t) = f(X(t))dt + GdW(t), \quad X(t_0) = X_0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここに $W(t)$ はWiener過程である。なお、形式的に $dW(t)/dt = N(t)$ と考えることができる。この研究で求める値は、応答 $y(t)$ の分散 $E[(y(t) - E[y(t)])^2]$ である。

a) 外力を白色雑音過程とした場合

$r(t) = n(t)$ であり、 $n(t)$ の確率特性は、次式で規定される。

$$E[r(t)] = 0, \quad E[n(t_1)n(t_2)] = \sigma^2\delta(t_1 - t_2) \quad \dots\dots\dots (5)$$

b) 外力を狭帯域過程とした場合

$r(t)$ の平均値は0であり、次の様な自己相関関数をもつ確率過程 $r(t)$ を考える。

$$E[r(t_1)r(t_2)] = \sigma^2 \exp\{-\beta|t_2 - t_1|\} \cos\Omega(t_2 - t_1) \quad \dots\dots\dots (6)$$

3. 等価線形化法による解析

(1)式と対応する線形な方程式(8)を構成し、両方程式の残差 $e(y, \dot{y})$ の二乗平均値が最小になるように、等価固有振動数 ω_* と減衰定数 h_* を決定する。

$$\ddot{y}(t) + 2h_*\omega_*\dot{y}(t) + \omega_*^2 y(t) + e(y(t), \dot{y}(t)) = r(t) \quad \dots\dots\dots (7)$$

非線形性が小さいとして、応答 $y(t)$ が正規過程であると仮定すると、 h_* と ω_* は次式のように与えられる。

$$h_* = h, \quad \omega_*^2 = \omega^2 + 3E[y(t)^2] \quad \dots\dots\dots (8)$$

この場合、構造系は線形になり、 $f(X(t))$ は $Ax(t)$ で表すことができる。構造-荷重系 $X(t)$ の共分散 $R_x(t) = E[X(t)X(t)^T]$ の応答は、次の共分散方程式に支配されている。

$$\dot{R}_x(t) = Ax(t)R_x(t) + R_x(t)A^T(t) + Q_x(t), \quad R_x(t_0) = R_0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

4. 高次モーメント方程式

(4)式において、 $X(t)$ の関数 $u(X(t))$ を

$$u(X(t)) = [x_1^1 \ x_2^1 \ x_3^1 \ x_4^1] \quad \dots\dots\dots (10)$$

とする。伊藤の定理より u の微分は次のように表される。

$$du = f^T \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{1}{2} \text{trace} \left[\frac{\partial u}{\partial X} \frac{\partial u}{\partial X} dW dW^T \right] dt + \frac{\partial u}{\partial X} dW \quad \dots\dots\dots (11)$$

両辺の平均をとり、Wiener過程の性質を用いると、次の高次モーメント方程式が得られる、(2), (3)。

$$\frac{d}{dt} E[u] = E \left[f^T \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{1}{2} \text{trace} \left[\frac{\partial u}{\partial X} \frac{\partial u}{\partial X} dW dW^T \right] \right] \quad \dots\dots\dots (12)$$

4. 数値解析と考察

数値計算では、構造系のパラメーターとして、 $\omega=1, h=0.05$ における非線形のパラメーター $\epsilon=1$ を考える。図-1では、白色雑音が作用した変位応答の標準偏差の定常応答を示したものである。横軸は外力の標準偏差 σ_n である。線形の場合は、外力の標準偏差と応答の標準偏差は比例する。非線形応答では、高次モーメントによる解法が等価線形化法より精度が良いとされている。図-2では、 $\sigma_n=0.5$ の場合の過渡応答を示したものである。 $t=40$ ではほとんど定常状態になっており、定常応答の値と一致する。

図-3は、狭帯域過程を受ける変位の定常応答を等価線形化法で解き、 ϵ を変化させて示したものである。横軸は系の固有振動数と狭帯域過程の中心周波数の比 Ω/ω で示した。狭帯域過程の $\beta = \Omega \tau / \sqrt{1 + \tau^2}$ とした場合、 $\tau=0.05$ である。図-3では Ω/ω に対する変位応答は、非線形の特有の現象である跳躍が見られる。非線形のパラメーター ϵ を、線形 $\epsilon=0$ から $\epsilon=1$ まで変化させると、応答は著しい変化を示す。次に、 $\Omega/\omega=1$ において変位の過渡応答の計算を行ったものが、図-4である。線形の場合、狭帯域過程が外力であると $\Omega/\omega=1$ において、共振に近い状態になるので、応答は最も大きくなる。他方、非線形系では $\Omega/\omega=1$ を過ぎて応答が最も大きくなる。

β が応答に及ぼす影響、跳躍点近傍の応答の挙動、さらに、高次モーメントの解については、講演時に説明する。

【参考文献】 (1) Arnold, L: Stochastic Differential Equation, Jhon Wiley & Sons, 1973. (2) Ibrahim, R. A. et al., Jour. As. Me., Vol. 52, 1985, Dec., pp. 965, (3) Wu, W. F. and Y. K. Lim., Int. J. Non-Linear Mechanics, Vol. 19, No. 4, pp. 349, 1984.

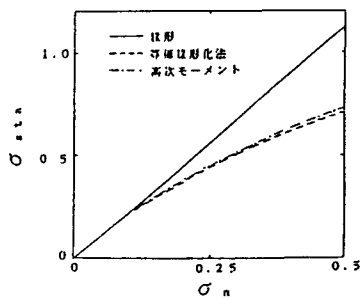


図-1. 白色雑音による定常応答

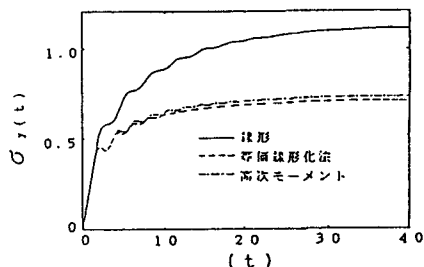


図-2. 白色雑音による非定常応答

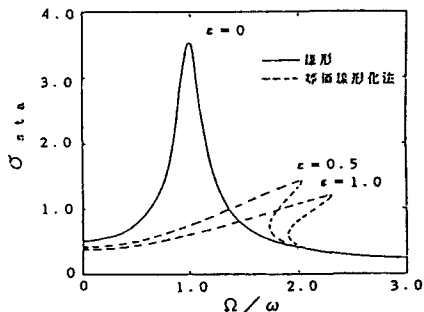


図-3. 狭帯域過程による定常応答

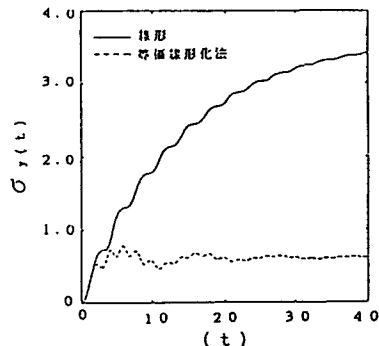


図-4. 狭帯域過程による非定常応答
($\Omega/\omega=1.0, \epsilon=1.0, h=0.05$)