

複数の切り欠きが梁に与える影響について

熊本大学 学生員 元田 和章 熊本大学 学生員 矢津田達昭
八代高専 正 員 水田 洋司 熊本大学 正 員 平井 一男

1. まえがき:

最近の交通量の増大や大型重量化は、橋が架設された当時の将来予想交通条件を大幅に上回っているのが現状である。このため、橋梁は老朽化が進み、損傷等が目立ち始めているものもある。これらの橋梁の健全度評価の一つとして、動特性の検討がなされている。即ち、橋梁の疲労や損傷の程度を固有振動数、固有モード等の動特性値から判定できないかということである。本研究では、これまでの1個の切り欠きが出来た時の固有振動数の変化を調べるのに加え、複数(2個)の切り欠きが出来た時の変化を調べるものである。その解析手段として、既に提案されている曲げ荷重を使用する方法を発展させたものを用い、モデルとしては単純梁を用いる。

2. 振動数方程式の導出:

1) 切り欠きが1個の場合

図-1の様に、単純梁に一对の曲げモーメントを作用させ、図-2の様な切り欠きを持つ梁を強制的に作る。図-3はその切り欠き部分を拡大したものである。ここで、もとの断面2次モーメントを I 、取り除く部分のものを I_a 、残りを I_b とする。そして I_a を取り除き、 I を比例配分して I_b にかかるモーメントの釣合を考える。この釣合式とモーダルアナリシスによる式⁽¹⁾より、

$$\frac{1}{\Delta x_j} - \kappa E I \sum \left\{ \frac{\Phi_n''(x_j) \Phi_n''(x_j)}{\lambda_n - \lambda} \right\} = 0 \quad (1)$$

ここで、 $\kappa = I_a/I_b$

λ : 切り欠きの有る梁の固有振動数 ω (rad/sec)の2乗

λ_n : 切り欠きの無い梁の固有振動数 ω_n (rad/sec)の2乗

Φ_n'' : n 次の正規化モード Φ_n の2階微分

となる。ところが、①式の $\sum$ の中の項は静的部分と動的部分が、共存した形となっている。これらを分割すると下記の様になる。

$$\alpha(\lambda) = M_s + E I \sum \left\{ \frac{\lambda}{\lambda_n(\lambda_n - \lambda)} \right\} \Phi_n''(x_j) \Phi_n''(x_j) \quad (2)$$

ここで、 $M_s = E I \sum \Phi_n''(x_j) \Phi_n''(x_j) / \lambda_n$

このモデルは静定構造物なので、 M_s は0となる。

②式を考慮して①式を変形すると、

$$\sum \frac{\lambda'}{n^4 - \lambda'} \sin^2\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = K \quad (3)$$

ここで、 $K = l/(2\kappa \Delta x_j)$, $\lambda' = \lambda/\lambda_n$:

Δx_j : 切り欠きの幅

③式は、1個の切り欠きを持つ単純梁の振動方程式である。

また、モードを求める式は、

$$\Phi_n(x) = \frac{2l}{E I \pi^2} \sum \frac{n^2}{n^4 - \lambda'} \sin \frac{n\pi}{l} x_j \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (4)$$

2) 切り欠きが2個の場合

1)と同様にして、図-4の様な2つの切り欠きを持つ単純梁を作る。モーメントの釣合を考えると、

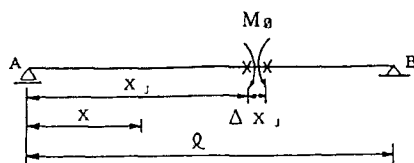


図-1 1対の曲げモーメント

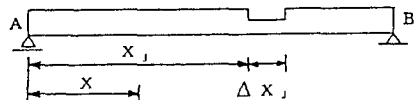


図-2 1個の切り欠きを持つ梁

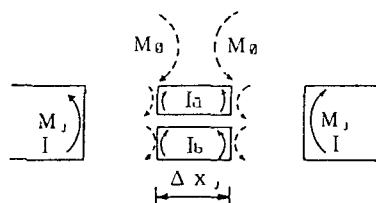


図-3 モーメントの釣合

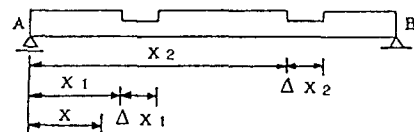


図-4 2個の切り欠きを持つ梁

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\kappa_1 \Delta x_1} - \alpha_{11}(\lambda) & -\alpha_{12}(\lambda) \\ -\alpha_{21}(\lambda) & \frac{1}{\kappa_2 \Delta x_2} - \alpha_{22}(\lambda) \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

となる。ここで、添え字は切り欠き位置を表す。これより、振動数方程式は次式の様になる。

$$\begin{aligned} & \kappa_2 \left\{ \sum \frac{\lambda'}{n^4 - \lambda'} \sin^2 \frac{n\pi}{Q} x_1 \right\} + \kappa_1 \left\{ \sum \frac{\lambda'}{n^4 - \lambda'} \sin^2 \frac{n\pi}{Q} x_2 \right\} - \left\{ \sum \frac{\lambda'}{n^4 - \lambda'} \sin^2 \frac{n\pi}{Q} x_1 \right\} \\ & \times \left\{ \sum \frac{\lambda'}{n^4 - \lambda'} \sin^2 \frac{n\pi}{Q} x_2 \right\} + \left\{ \sum \frac{\lambda'}{n^4 - \lambda'} \sin \frac{n\pi}{Q} x_1 \sin \frac{n\pi}{Q} x_2 \right\}^2 = \kappa_1 \kappa_2 \quad (6) \end{aligned}$$

ここで、 $\kappa_1 = Q/(2\kappa_1 \Delta x_1)$, $\kappa_2 = Q/(2\kappa_2 \Delta x_2)$

3. 数値計算：

1) 切り欠きが1個の場合

式③を用いて κ を求め、 κ を横軸に、単純梁の振動数 ω_0 と切り欠きがある場合の振動数 ω の比($R = \sqrt{\lambda/\lambda_1}$)を縦軸に取った時の関係をグラフに示すと、図-5の実線の様になる。ここで、矩形断面で、 $Q = 20\text{m}$, $\Delta x_j = 10.0\text{cm}$ の場合、 $\kappa = 100$ の時、切り欠きの深さは梁断面の中央まで進行している。図-6は、切り欠き位置と固有振動数比を示したものである。1次では $Q/2$ 点、2次では $Q/2$ 点、3次では、 $Q/6$, $Q/2$ 点で各々最大変化を示している。これらの位置は、各モードの腹の位置と一致していることが分かる。図-7は、切り欠き位置 $Q/4$ 点の時の1, 2次モードを示している。切り欠きの無い梁のモードに比べて、 $\kappa = 1.0$ では、少々変化が現れるが、 $\kappa = 10$ では、殆ど変化は見られず、 $\kappa = 100$ では、全く変化は見られない。

2) 切り欠きが2個の場合

2個の切り欠きが同じ大きさ($\kappa_1 = \kappa_2$)とすると、式⑥より、

$$\begin{aligned} & \kappa^2 - \left(\sum \frac{\lambda'}{n^4 - \lambda'} \sin^2 \frac{n\pi}{Q} x_1 + \sum \frac{\lambda'}{n^4 - \lambda'} \sin^2 \frac{n\pi}{Q} x_2 \right) \kappa \\ & + \left\{ \left(\sum \frac{\lambda'}{n^4 - \lambda'} \sin^2 \frac{n\pi}{Q} x_1 \right) \left(\sum \frac{\lambda'}{n^4 - \lambda'} \sin^2 \frac{n\pi}{Q} x_2 \right) \right. \\ & \left. - \left(\sum \frac{\lambda'}{n^4 - \lambda'} \sin \frac{n\pi}{Q} x_1 \sin \frac{n\pi}{Q} x_2 \right)^2 \right\} = 0 \quad (7) \end{aligned}$$

となる。この2次方程式を解いて、 κ を求める。図-5の破線は、切り欠きが $Q/3.9$, $Q/4$ 点の2ヶ所に入った時のものを示す。これは、1個の切り欠きが $Q/3.95$ 点にある時の変化曲線と一致する。

4. 結論：

正規化モードからは、切り欠きの位置や大きさを判定するのは非常に難しい。2個の切り欠きが入った場合、固有振動数の変化には、お互いの間に影響作用を受けるものとそうでないものがあり、今後検討する必要がある。また、2個の間隔が狭くなると相互影響作用は起こらないことが図-5より分かる。

参考文献：

(1) 清田秀二他：『短い切り欠きが梁の固有値に与える影響度について』年次学術講演会 昭和63年10月

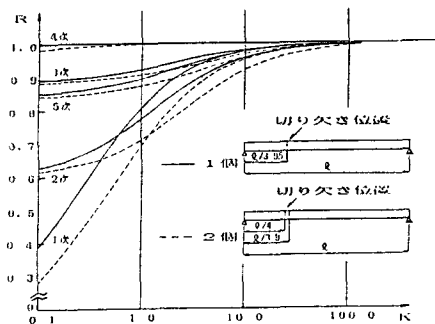


図-5 固有振動数比と損傷の関係

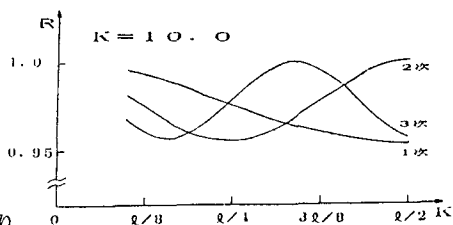


図-6 次数と切り欠き位置の関係

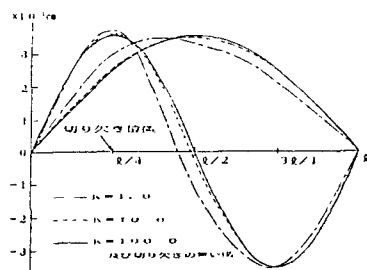


図-7 正規化モード図(1, 2次)