ケーブルの振動に及ぼす非抗圧縮性の影響

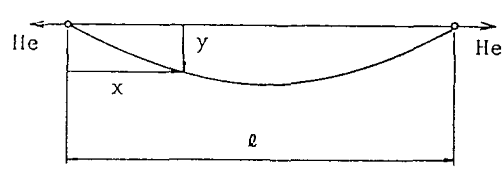
長崎大学工学部　正　員　○髙橋和雄
長崎大学工学部　学生員　　白石隆俊

1．まえがき　ケーブルの非線形振動解析には、軸力のみに抵抗する部材として定式化された連続体としての運動方程式が使用されている。この場合のケーブルの構成則は、トラス部材と同じく引張力にも圧縮力にも抵抗できるものと仮定されている。しかし、ケーブルは圧縮力には抵抗しない(非抗圧縮性)ので、たわみによる変動張力が初期張力を越えた場合、この仮定は成立しなくなる。ケーブルの非線形自由振動の解析結果によれば、２次の非線形項が効くようなサグ比では、振動中に圧縮力が生じていると考えられる[1]。したがって、ケーブルの非線形振動を取り扱う場合に、非抗圧縮性の影響を評価しておくことが必要である。そこで、本研究は、連続体としての運動方程式を差分法を用いて離散化してケーブルの面内非線形振動に及ぼす非抗圧縮性を検討するものである。本研究では、ケーブルに圧縮力が生じると、離散点でケーブルのたわみ角が不連続となるり、変動張力に高調波が入ってくることを避けるために、ケーブルに曲げの項を加えた。

2．解法　(1)運動方程式　Irvineのテキスト[2]にしたがって、サグ比$f/\ell<1/8$以下の図－１に示すような扁平ケーブルを対象とする。このとき、ケーブルの初期形状を放物線と近似することができ、また、ケーブルの面内水平方向の慣性力を無視することができる。ケーブルの面内鉛直方向の非線形運動方程式に、曲げの項[3]を考慮すれば、次式が得られる。

$$-EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+(H_e+h)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{8f}{\ell^2}(H_e+h)-m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+mg-p(x,t)=0 \tag{1}$$

ここに、E：ヤング率，I：断面２次モーメント，w：たわみ，x：スパン方向の座標，H_e：初期水平張力，h：ケーブルのたわみによる伸びに起因する付加水平張力，f：ケーブルサグ，ℓ：スパン長，m：単位長さあたりの質量，t：時間，g：重力加速度，p(x,t)：ケーブルの鉛直方向の荷重強度．



図－１　ケーブルの一般図

このとき、ケーブルの付加水平張力は次式となる。

$$h=\frac{EA}{L_E}\left\{\frac{mg}{H_e}\int_0^\ell w\,dx+\frac{1}{2}\int_0^\ell\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2dx\right\} \tag{2}$$

(2)無次元化　次のような無次元記号を導入する。$\bar{w}=w/\ell$，$\bar{x}=x/\ell$，$\tau=\omega_1 t$…(３)　ここに、$\omega_1=\sqrt{\frac{H_e}{m}\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2}$．このとき、式(１)および式(２)を利用して得られる全水平張力は、次のように無次元化される。

$$\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\tau^2}+\frac{k^2\delta}{\pi^2}\frac{\partial^4\bar{w}}{\partial\bar{x}^4}-\frac{H(\tau)}{\pi^2}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{x}^2}+\frac{8\gamma}{\pi^2}(H-1-p)=0 \tag{4}$$

$$H=1+\frac{k^2}{1+8\gamma^2}\left\{8\gamma\int_0^1\bar{w}\,d\bar{x}+\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}}\right)^2d\bar{x}\right\} \tag{5}$$

ここに、$k^2=EA/H_e$：ケーブルの縦波－横波伝播速度比，$\gamma=f/\ell$：サグ比，$\delta=EI/\ell^2EA$：曲げ－伸び剛性比(曲げ抵抗比)[3]，$H=(H_e+h)/H_e$：無次元全水平張力．

(3)差分法による離散化　式(４)，(５)を差分法の陽公式を用いて離散化する。このとき、式(５)の定積分の項はシンプソンの1/3公式を用いて数値積分に置き換える。すなわち、ケーブルのｉ点のj+1番目の時間のたわみ$\bar{w}_{i,j+1}$は次のように書き改められる。

$$\bar{w}_{i,j+1}=2\bar{w}_{i,j}-\bar{w}_{i,j-1}-\frac{k^2\delta}{\pi^2}\left(\frac{\Delta\tau}{\Delta\bar{x}^2}\right)^2(\bar{w}_{i+2,j}-4\bar{w}_{i+1,j}+6\bar{w}_{i,j}-4\bar{w}_{i-1,j}+\bar{w}_{i-2,j})$$
$$+\frac{H(\tau_j)}{\pi^2}\left(\frac{\Delta\tau}{\Delta\bar{x}}\right)^2(\bar{w}_{i+1,j}-2\bar{w}_{i,j}+\bar{w}_{i-1,j})+\frac{8\gamma}{\pi^2}\Delta\tau^2\{1-H(\tau_j)-p_{ij}\} \qquad (6)$$

ここに、$H(\tau_j)=1+\frac{k^2}{1+8\gamma^2}(8\gamma A_j+\frac{1}{2}B_j)$, $A_j=\frac{\Delta\bar{x}}{3}(\bar{w}_{i,j}+2\sum_{even}\bar{w}_{n,j}+4\sum_{odd}\bar{w}_{n,j}+\bar{w}_{M,j})$,
$B_j=\frac{1}{12\Delta\bar{x}}\{\bar{w}_{i,j}^2+2\sum_{even}(\bar{w}_{n+1,j}-\bar{w}_{n-1,j})^2+4\sum_{odd}(\bar{w}_{n+1,j}-\bar{w}_{n-1,j})^2+4\bar{w}_{M-1,j}^2\}$, $\Delta\bar{x}$：空間分割間隔，$\Delta\tau$：時間分割間隔，M：分割数(偶数).

(4)解の安定性　式(6)の差分式は条件付き安定で、$\Delta\tau/\Delta\bar{x}^2<1/4(\pi/k^2\delta)$のとき、安定な解が得られる。

(5)圧縮力の処理　$H(\tau_j)=0$　$H(\tau_j)<0$のとき　　(7)

3．数値結果　(1)圧縮力の発生領域

本ケースの動特性を支配するパラメーターは、サグ比γ、縦波－横波伝播速度比kおよび曲げ抵抗比δの3個である。δ=0の場合について、線形振動の固有振動形に任意の振幅比を乗じた空間波形を初速度0で開放する初期条件のもとに、時間応答解析を行う。その結果は、表－1のとおりで、各サグ比に対する圧縮力が生じる初期振幅比(τ=0)の領域が得られる。特定のサグ比では、比較的小さい振幅比で圧縮力が生じている。このような振幅は、ケーブルの基礎式が成り立つ範囲に含まれると考えられる。2次の非線形項が効くようなサグ比をもつケーブル[1]においてこの現象が生じる。

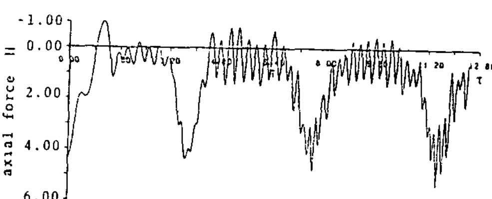
表－1　圧縮力の発生領域

(a) k=30

sag-to-span ratio γ	amplitude ratio lower limit	amplitude ratio higher limit
0.021	0.025	0.026
0.022	0.024	0.031
0.023	0.023	0.030
0.024	0.011	0.032
0.026	0.010	0.034
0.030	0.011	0.073

(b) k=60

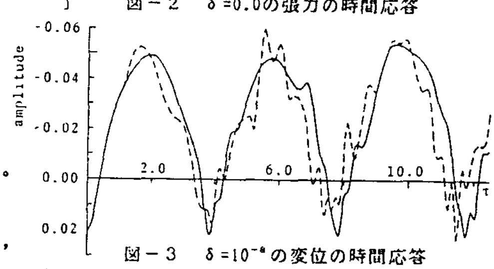
sag-to-span ratio γ	amplitude ratio lower limit	amplitude ratio higher limit
0.011	0.012	0.015
0.013	0.005	0.041
0.015	0.006	0.036
0.017	0.007	0.045
0.020	0.006	0.046



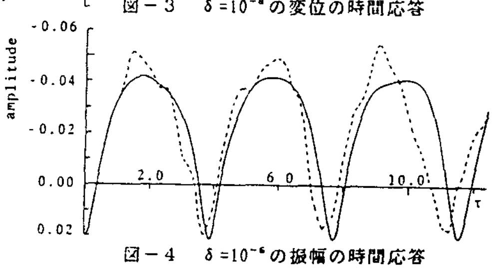
図－2　δ=0.0の張力の時間応答

(2)圧縮力が生じた後の時間応答　k=30, γ=0.04およびδ=0のケーブルを、振幅比0.02の初期条件のもとに、時間応答解析をしたときの張力応答を図－2に示す。全水平張力が圧縮力になると、高調波が乗ってくる。この原因はケーブルのたわみ角が離散点で不連続となるためである。

(3)曲げを考慮した場合の時間応答　曲げの影響(δ≠0)を考慮したときのケーブル中央点の変位の時間応答を図-3, 4に示す。これらの図において、実線が圧縮力に抵抗しないと仮定(圧縮力無視、非抗圧縮性)したときの解で、破線が圧縮力にも抵抗すると仮定(圧縮力考慮)したときの解である。これらの図より明らかなように、非抗圧縮性の影響は、振動の振動数を小さくする効果をもつ。図－3のδ=10^{-8}の場合には、圧縮力を考慮した応答波形に、図－2のような高調波の影響が見受けられる。図－4のδ=10^{-6}程度になれば、高調波の影響は除かれる。このδ=10^{-6}は実在ケーブルの曲げ抵抗比よりも大きめの値である。



図－3　δ=10^{-8}の変位の時間応答



図－4　δ=10^{-6}の振幅の時間応答

4．まとめ

本研究では、曲げの影響を考慮したケーブルの運動方程式を用いて、圧縮力が生じた後のケーブルの動特性を追跡する方法を提案した。今後、非抗圧縮性が振幅に及ぼす影響、面内水平軸方向変位の影響を評価する必要がある。

参考文献　1)髙橋・藤本・村中・田川：土木学会論文報告集，第338号，1983. 2)Irvine, H. M.：Cable Structures, The MIT Press, 1981. 3)山口・宮田・伊藤：土木学会論文報告集，第319号，1982.