

面内変動せん断力を受ける長方形板の動的安定性

長崎大学工学部 学生員 ○西川博公

長崎大学工学部 正 員 高橋和雄

片山鉄工所 正 員 夏秋義広

1. まえがき プレートガーダー橋の腹板に面内変動荷重が作用すると、係数励振振動によって面外振動が発生する。著者らは、腹板の鉛直補剛材で囲まれるパネルを面内力を受ける長方形板にモデル化して、面内変動曲げ¹⁾²⁾³⁾および面内変動せん断力⁴⁾が作用する場合を解析している。せん断力を受ける長方形板の座屈波形は、固有振動波形とかなり異なるために、変動せん断力の作用力のもとに、変動一様圧縮力や曲げモーメントの場合に比較して数多くの固有振動が励振される⁴⁾。したがって、係数励振振動の係数行列の次元が大きくなり、しかも現れる不安定領域の発生位置が重なるために、不安定領域の決定および種類の特が困難である。このため、前報のせん断力を受ける長方形板の動的安定性の論文⁴⁾は、きわめて不十分であった。そこで、本研究は、係数励振振動の係数行列の性質を利用することにより行列を分解する手法を提案し、これらの諸問題を解決して具体的に不安定領域を求めた結果を報告する。

2. 解法 図-1に示すような長方形板の面外方向の変位を $w(x, y, t)$ とする。平板の周辺に静的せん断力 N_{xy0} と変動せん断力 $N_{xyt} \cos \Omega t$ の和からなるせん断力 N_{xy} が作用するものとする。安定を失った直後の長方形板の運動方程式は次式で与えられる。

$$L(w) = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \nabla^4 w - 2(N_{xy0} + N_{xyt} \cos \Omega t) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \quad (1)$$

ここに、 ρ : 板の密度、 h : 板厚、 $D = Eh^3 / \{12(1 - \nu^2)\}$: 板剛度、

E : ヤング率、 ν : ポアソン比、 Ω : 励振円振動数、 t : 時間。

図-1 長方形板の一般図

長方形板の境界条件として、次のような2ケースを与える。case I : 全周単純支持、case II : 一对辺単純支持 ($x=0, a$)、他対辺固定 ($y=0, b$)。

式(1)の解を次のように仮定する。

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{mn}(t) W_{mn}(x, y) \quad (2)$$

ここに、 T_{mn} : 未知の時間関数、 W_{mn} : 固有振動形

Galerkin法を適用し、時間関数 T_{mn} に関する方程式に変換すると、次式が得られる。

$$[I]\{T\} + [F]\{T\} + (\bar{N}_{xy0} + \bar{N}_{xyt} \cos \bar{\omega} \tau)[G]\{T\} = \{0\} \quad (3)$$

ここに、 $[I]$: 単位行列、 $[F]$: 対角行列 $\text{diag}(\omega_{11}^2, \omega_{12}^2, \omega_{13}^2, \dots, \omega_{21}^2, \dots)$ 、 $[G]$: 係数励振行列 (正方行列)、 $\{T\} = (T_{11} \ T_{12} \ T_{13} \ \dots \ T_{21} \ T_{22} \ T_{23} \ \dots)^T$ 、 $\bar{N}_{xy0} = N_{xy0} / N_{cr}$ 、 $\bar{N}_{xyt} = N_{xyt} / N_{cr}$ 、

N_{cr} : 座屈せん断力、 $\bar{\omega} = \Omega / \Omega_1$: 無次元加振円振動数、 $\omega_{mn} = \Omega_{mn} / \Omega_1$ 。

いま、 $m, n = 1, 2, 3, 4$ まで採用した16自由度系 $(T_{11} \ T_{12} \ T_{13} \ T_{14} \ T_{21} \ T_{22} \ T_{23} \ T_{24} \ T_{31} \ T_{32} \ T_{33} \ T_{34} \ T_{41} \ T_{42} \ T_{43} \ T_{44})^T$ を考える。このときの係数行列 $[G]$ は次のように表わされる。

$$[G] = \begin{bmatrix} [0] & [H]_{21}^{1n} & [0] & [H]_{41}^{1n} \\ [H]_{11}^{2n} & [0] & [H]_{31}^{2n} & [0] \\ [0] & [H]_{21}^{3n} & [0] & [H]_{41}^{3n} \\ [H]_{11}^{4n} & [0] & [H]_{31}^{4n} & [0] \end{bmatrix} \quad (4) \quad \text{ここに、} [H]_{ij}^{mn} = \begin{bmatrix} 0 & f_{m12} & 0 & f_{m14} \\ f_{m21} & 0 & f_{m23} & 0 \\ 0 & f_{m32} & 0 & f_{m34} \\ f_{m41} & 0 & f_{m43} & 0 \end{bmatrix}$$

$[0]$: 4行4列の零行列

式(4)から明らかなように行列 $[G]$ の要素の3/4は0である。この性質を利用して、行列の分割を考える。行列 $[G]$ と $[H]_{ij}^{mn}$ の要素構成は同じであるから、行列 $[G]$ と $[H]_{ij}^{mn}$ の2行目と3行目、2列目と3列目をそれぞれ入れ替えることによって、副対角線上に4行4列の小行列が集められる。したがって、行列 $[G]$ は

4つの小行列に分離される。このとき、式(3)は次のように2個の微分方程式に分離分割される。

$$[I_1]\{T_1\}+[F_1]\{T_1\}+(\bar{N}_{xy0}+\bar{N}_{xyt}\cos\bar{\omega}\tau)[G_1]\{T_1\}=\{0\} \quad (5-a)$$

$$[I_2]\{T_2\}+[F_2]\{T_2\}+(\bar{N}_{xy0}+\bar{N}_{xyt}\cos\bar{\omega}\tau)[G_2]\{T_2\}=\{0\} \quad (5-b)$$

ここに、 $\{T_1\}=(T_{11} \ T_{13} \ T_{31} \ T_{33} \ T_{12} \ T_{32} \ T_{14} \ T_{34})^T$ 、 $\{T_2\}=(T_{21} \ T_{23} \ T_{41} \ T_{43} \ T_{22} \ T_{42} \ T_{24} \ T_{44})^T$
式(5-a)と(5-b)から別個に得られる不安定領域を各々TYPE-1、TYPE-2とする。

3. 数値結果 図-2,3,4,5は、case 1 (縦横比 $\beta=1.5$)の面外不安定領域を $\bar{N}_{xy0}=0.0$ と0.3に対して示した

ものである。これらの図中において、横軸 $\bar{\omega}$ は無次元加振振動数を、縦軸 $\bar{N}_{xyt}$ は無次元せん断力の振幅を示す。図中の右下がりの斜線部が結合共振 $(\omega_{mn}+\omega_{ij})/k$ の不安定領域を、右上がりの斜線部が単純共振 $2\omega_{mn}/k$ の不安定領域を意味する。図-2,3のように、

$\bar{N}_{xy0}=0.0$ の場合には主として結合共振が現れている。文献(4)で直接式(3)を解析する方法では、現れる不安定領域が同じ振動数に重なるために、分離が困難であった。しかし、行列を分離するとそれぞれTYPE-1とTYPE-2から別個に得られるために、不安定領域の特定が容易で、広い振動数領域にわたって不安定領域が得られている。図-4,5の静的せん断力が作用する場合

には単純共振 $2\omega_{mn}/k$ が現われ、結合共振の幅が狭くなるといえる。

4. まとめ 本研究で提案した行列を分離する方法は、変動せん断力を受ける長方形板の解析に極めて有効で、不安定領域を明らかにすることができた。不安定領域に及ぼす境界条件、減衰力および曲げモーメントが同時に作用する場合の影響については、講演時に発表する。

参考文献 1),2),3)高橋他：土木学会論文報告集，第341号(1984)，Proc.of JSCE, No.374(1986)，No.392(1988)，4)高橋・夏秋・川副・小西：構造工学論文集，Vol 35A(1989)

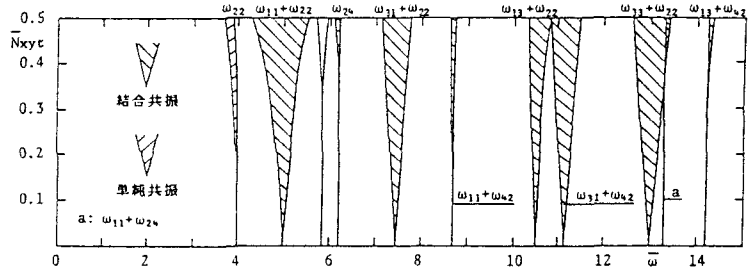


図-2 長方形板の面外不安定領域 ($\beta=1.5, \bar{N}_{xy0}=0.0$, TYPE-1, case I)

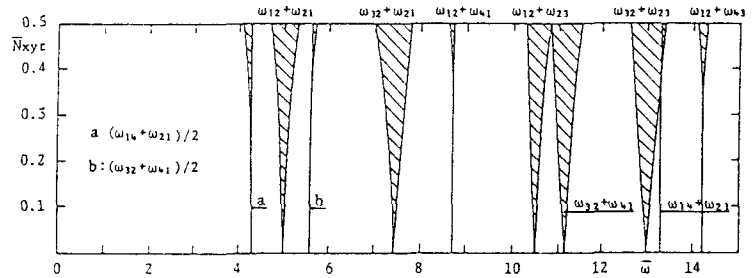


図-3 長方形板の面外不安定領域 ($\beta=1.5, \bar{N}_{xy0}=0.0$, TYPE-2, case I)

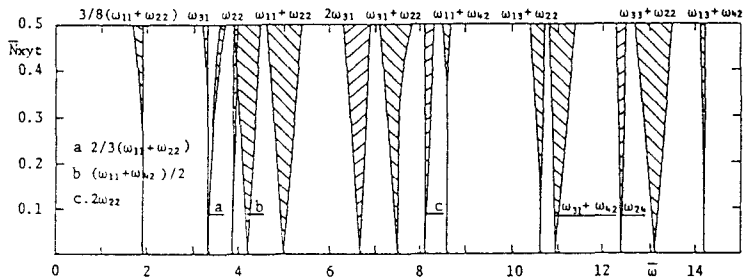


図-4 長方形板の面外不安定領域 ($\beta=1.5, \bar{N}_{xy0}=0.3$, TYPE-1, case I)

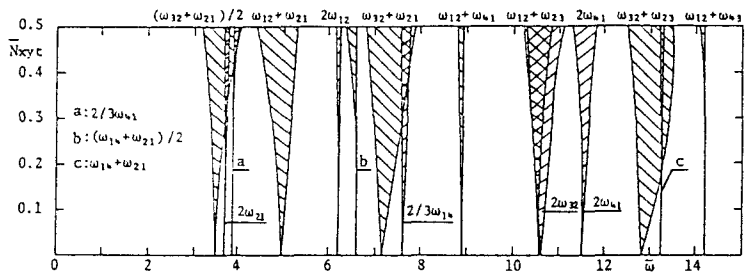


図-5 長方形板の面外不安定領域 ($\beta=1.5, \bar{N}_{xy0}=0.3$, TYPE-2, case I)