

偏平シェルの曲げの一解析法

長崎大学	正 員	崎山 毅
長崎大学	正 員	松田 浩
九州大学	〇正 員	若菜啓孝
長崎大学	学生員	森田千尋

1. まえがき

著者らの一部は、先に、変厚矩形板の解法として、変厚矩形板の基礎微分方程式について板の縦横の等分割線の交点における離散解を求め、これに基づく解析法を提示した。本文は、その解法を偏平シェルの曲げ問題に拡張したものである。以下に解析方法ならびに数値計算結果について示す。

2. 偏平シェルの基礎微分方程式

図1において、面に対し接線方向の変位を u, v および垂直方向の変位を w とし、面内力を N_x, N_y および N_{xy} 、せん断力を Q_y, Q_x 、ねじりモーメントを M_{xy} 、曲げモーメントを M_y, M_x 、たわみ角を θ_y, θ_x とすれば、せん断変形の影響を考慮した偏平シェルの曲げの基礎微分方程式は式(1-1)～(1-13)のように表せる。

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} - k_x Q_x + q_x = 0 \quad (1-1)$$

$$\frac{\partial \theta_u}{\partial x} + \frac{\partial \theta_v}{\partial y} = \frac{2M_{xy}}{D(1-\nu)} \quad (1-8)$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} - k_y Q_y + q_y = 0 \quad (1-2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x = \frac{Q_x}{\kappa G h} \quad (1-9)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + k_x N_x + k_y N_y + 2k_{xy} N_{xy} + q_z = 0 \quad (1-3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y = \frac{Q_y}{\kappa G h} \quad (1-10)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + Q_x = 0 \quad (1-4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} - (k_x + \nu k_y) w = \frac{N_x}{F} \quad (1-11)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + Q_y = 0 \quad (1-5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} - (k_y + \nu k_x) w = \frac{N_y}{F} \quad (1-12)$$

$$\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \theta_y}{\partial y} = \frac{M_x}{D} \quad (1-6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2k_{xy} w = \frac{2M_{xy}}{F(1-\nu)} \quad (1-13)$$

$$\frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \theta_x}{\partial x} = \frac{M_y}{D} \quad (1-7)$$

ここに、 $q_x = q_x(x, y)$, $q_y = q_y(x, y)$, $q_z = q_z(x, y)$: 面に対する接線方向および垂直方向の荷重強度, E : 弾性係数, $G = E/2(1+\nu)$: せん断弾性係数, ν : ポアソン比, $h = h(x, y)$: 板厚, $D = D(x, y) = Eh^3/12(1-\nu^2)$: 板の曲げ剛度, $F = F(x, y) = Eh/(1-\nu^2)$: 板の伸び剛度, $\kappa = 5/6$: せん断修正係数, k_x, k_y, k_{xy} : 各軸方向の曲率およびねじれ率

次の無次元量:

$$\begin{aligned} X_1 &= a^2 Q_y / [D_0(1-\nu^2)], X_2 = a^2 Q_x / [D_0(1-\nu^2)], X_3 = a M_{xy} / [D_0(1-\nu^2)], X_4 = a M_y / [D_0(1-\nu^2)], \\ X_5 &= a M_x / [D_0(1-\nu^2)], X_6 = \theta_y, X_7 = \theta_x, X_8 = w/a, X_9 = w/a, X_{10} = v/a, X_{11} = a^2 N_{xy} / [D_0(1-\nu^2)], \\ X_{12} &= a^2 N_y / [D_0(1-\nu^2)], X_{13} = a^2 N_x / [D_0(1-\nu^2)], \eta = x/a, \zeta = y/b, a, b: \text{矩形板の縦横の辺長}, \mu = b/a, \\ h_0 &: \text{基準板厚}, q^* = \mu q_0 a^3 / [D_0(1-\nu^2)] (q/q_0), (q: q_x, q_y, q_z), q_0: \text{基準荷重強度}, K = Eh_0^3 / (12 \kappa G h), \\ I &= I(x, y) = \mu(1-\nu^2)(h_0/h)^3, J = J(x, y) = 2\mu(1+\nu)(h_0/h)^3, D_0 = Eh_0^3 / [12(1-\nu^2)]: \text{基準板剛度}, \\ K^* &= bk(x, y), (k: k_x, k_y, k_{xy}), L_1 = h_0^3(1-\nu^2)/12ha^2, L_2 = h_0^3(1+\nu)/6ha^2 \end{aligned}$$

を用いて無次元化後、微分方程式の積分方程式への変換と積分方程式の近似解法の応用により任意の離散点 (i, j) における離散解 $X_{p,ij}$ ($p=1\sim 13$)は次式のように整理される。

$$X_{p,j} = \sum_{k=0}^m \{ \sum_{d=0}^m a_{p,j,k,d} \cdot X_{r,k} + \sum_{d=0}^m b_{p,j,l,d} \cdot X_{s,l} \} + q_{p,j} \quad (2)$$

ここに、 $X_{r,k}$ 、 $X_{s,l}$ はいわゆる積分定数であり、境界条件によって決定されるべきものである。また、係数 $a_{p,j,k,d}$ 、 $b_{p,j,l,d}$ 、 $q_{p,j}$ は伝達マトリックス法における格間伝達マトリックスに相当するものである。

3. 数値計算例

図2は4辺固定偏平シェルの積分定数と境界条件を示したものである。解析例として、4辺単純支持および4辺固定の偏平シェルを取り扱った。表1は4辺単純支持偏平シェルの中央点のたわみおよび曲げモーメントを示したものである。本法による解析結果は $\bar{K}=1.10$ のとき $m=8$ 分割の計算値の厳密解に対する比は、たわみがそれぞれ0.5%、3.7%、曲げモーメントが2.7%、7.8%となり、 $\bar{K}$ の値が大きくなるにつれ精度が悪くなる。表2は4辺固定偏平シェルの曲率を種々変化させた場合の中央点のたわみの数値解の収束性および精度を検討するために、有限帯板法による解析結果との比較を行ったものである。同表より、 R_y/a が正のときは分割数 m の増加とともに一様な収束性を示すが、 R_y/a が負のときは振動して収束している。

参考文献(1)坪井善勝著：連続体力学序説、
(2)D.Bucco, et-al:Static analysis of shallow shells of arbitrary shape - a new approach, Int. Jour. for Numerical Method in Engng. Vol.18, pp.976-979,
(3)福地信義：有限帯板法による防撓曲面構造の解析、日本造船学会論文集、第135号(1974)、第137号(1975)

表1 4辺単純支持偏平シェルの中央点のたわみおよび曲げモーメント ($\nu=0.3$)

$\bar{K}$	$w/10^{-2}qa^4/D$			$M_x/10^{-1}qa^2$		
	$m=4$	$m=8$	Exact	$m=4$	$m=8$	Exact
0	0.413	0.408	0.406	0.542	0.492	0.479
1	0.412	0.407	0.405	0.541	0.490	0.478
2	0.409	0.404	0.402	0.537	0.487	0.473
3	0.405	0.400	0.397	0.533	0.482	0.467
4	0.400	0.394	0.390	0.525	0.474	0.458
5	0.393	0.386	0.381	0.516	0.465	0.447
6	0.385	0.378	0.371	0.506	0.454	0.434
7	0.377	0.368	0.360	0.494	0.442	0.420
8	0.367	0.357	0.348	0.481	0.429	0.404
9	0.356	0.345	0.335	0.468	0.415	0.388
10	0.345	0.333	0.321	0.453	0.400	0.371

$$\bar{K}=a^2 Eh/D/R_x$$

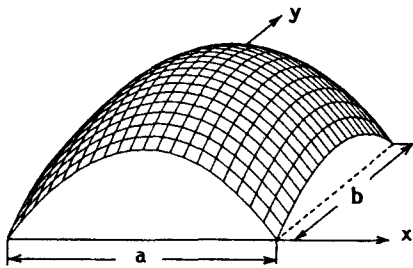


図1 偏平シェルの座標系

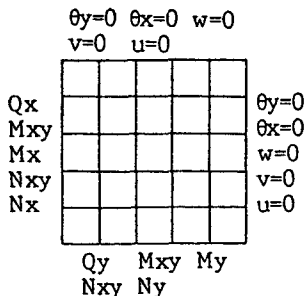


図2 積分定数と境界条件(4辺固定)

表2 4辺固定偏平シェルの中央点のたわみ ($w/10^{-3}qa^4/D$) ($R_x/a=10.0$, $\nu=0.3$)

R_y/a	$m=4$	$m=6$	$m=8$	$m=10$	$m=12$	F.S.M.
-10	0.622	0.672	0.645	0.633	0.627	0.614
-5	0.330	0.369	0.346	0.337	0.332	0.323
∞	0.875	0.800	0.776	0.765	0.760	0.746
5	0.325	0.269	0.250	0.242	0.238	0.231
10	0.612	0.508	0.483	0.472	0.466	0.455

($R_x/a=8.0$, $\nu=0.3$)

R_y/a	$m=4$	$m=6$	$m=8$	$m=10$	$m=12$	F.S.M.
-8	0.481	0.527	0.501	0.490	0.484	0.471
-4	0.232	0.260	0.241	0.233	0.229	0.222
∞	0.738	0.660	0.634	0.623	0.617	0.604
4	0.228	0.182	0.166	0.160	0.157	0.152
8	0.472	0.376	0.353	0.343	0.338	0.328

F.S.M.:Finite Strip Method³⁾

面の橋軸方向のひずみ分布を示している。これも載荷点部分では床版のひずみに差が出ているがよい対応を示しているといえる。また、図6には内桁部分のひずみ分布を、ずれ止めのばね係数を変化させて比較したものとした。鋼桁の上縁部でかなりの差が出ており、床版のひずみと対応させて比較すると、ずれの影響が顕著に表れているのがよくわかる。他の計算結果については当日発表する予定である。

参考文献：1)山尾他：「合成I桁橋の……」，構造工学論文集 Vol.35A, 1989.3 2)椎原他：「トラス置換による……」，第43回土木年講概要集, 1988.10 3)佐藤他：「床組と横桁の……」，土論集, 第222号, 1974.2

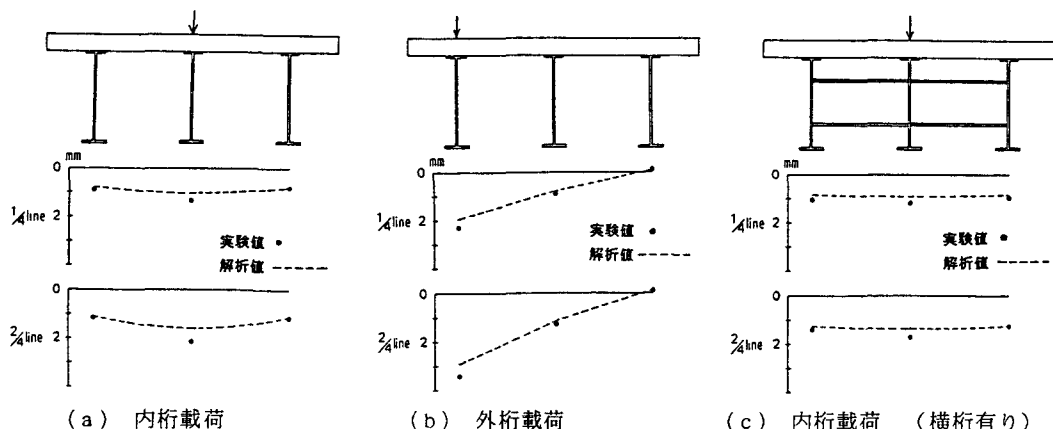


図4 たわみ分布図

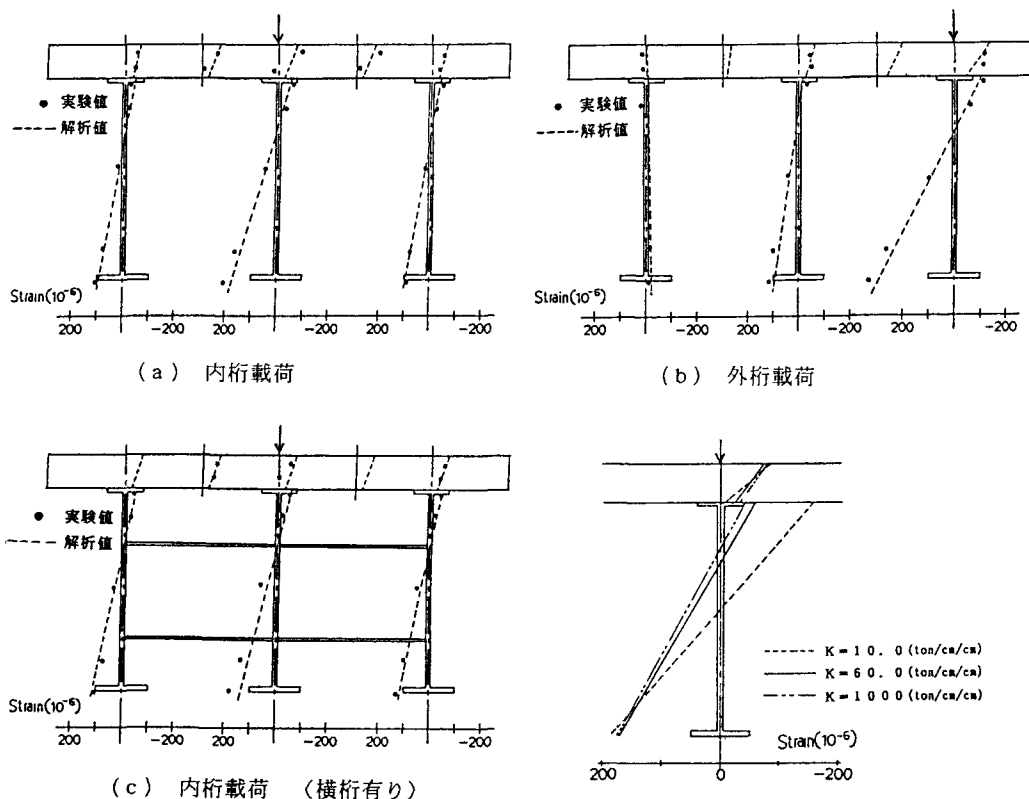


図5 ひずみ分布図

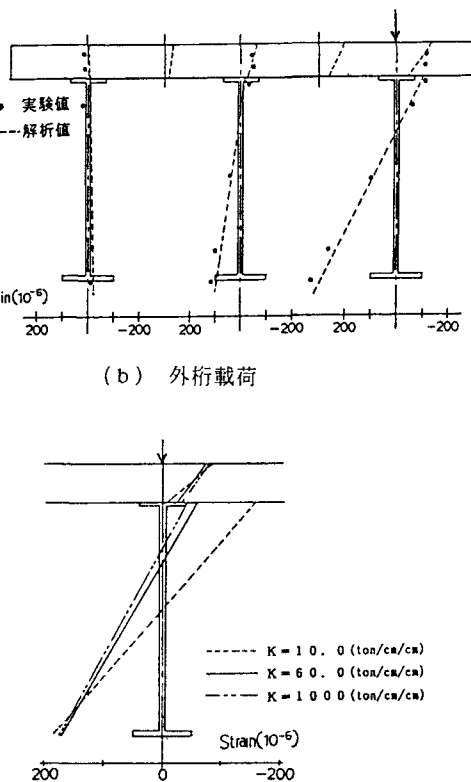


図6 ずれ止めのばね係数の影響