

変厚矩形板の曲げの一簡易解析法

長崎大学 正 員 崎山 毅
 長崎大学 ○正 員 松田 浩
 九州大学 正 員 若菜啓孝
 長崎大学 学生員 森田千尋

1. まえがき

筆者らは、先に、任意の境界条件、荷重条件および変断面性に対する解析の容易さおよび方法の一般性という観点に立ち、基礎微分方程式の積分方程式への変換と積分方程式の近似解法の実用とにより、変厚矩形板の基礎微分方程式の離散解を求め、これに基づく変厚板の解法を提示した。¹⁾

本報告は、境界条件を対辺単純支持他対辺任意とし、板厚変化も単純支持辺に沿って、一方向に変化する変厚矩形板を対象とした解析法を提示したものである。このように境界条件、板厚変化を限定すると、変厚板の基礎微分方程式を一方向には級数展開して定式化しなおした上で、先に提示した解法と同様な手法で数値解析を行うことができる。

一方向に級数展開する解法として、有限帯板法あるいは伝達マトリックス法などが提示され既に実用化されており、本法は伝達マトリックス法と類似性があるものと考えられるが、(1)基礎微分方程式を積分方程式に変換して、数値積分法を応用すること、(2)格間伝達マトリックスが基礎式を展開することにより誘導されること、(3)従来の伝達マトリックス法は薄板を対象としていたが、本法の基礎式はせん断変形の影響を考慮したMindlin理論に基づくこと、(4)解析のフローがあたかも微分方程式を解析的に解くかのような解析手法であること、などの点において、従来の伝達マトリックス法とは相違点が見い出される。また、本法によれば、最終的に解くべき連立方程式の未知数が3個となり、パソコンなどの比較的小型の計算機でも短時間で計算可能である。

2. 変厚板の基礎微分方程式および離散解

Fig.1に示すように、 $y=0$ 、および $y=b$ なる対辺上で単純支持され、他の対辺の支持条件が任意で、かつ、板厚が x 方向にのみ変化する変厚板を考える。 y 方向にのみ級数展開することを考慮すると、Mindlin理論に基づく、変厚矩形板の曲げ挙動を支配する基礎微分方程式は、たわみ w 、たわみ角 θ_y, θ_x 、せん断力 Q_x 、曲げモーメント M_x 、ねじりモーメント M_{xy} の6個の諸量を独立変数とする次の6式で与えられる。⁴⁾

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\kappa G h \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) - q \quad (1-1) \quad \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = \kappa G h \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \right) - D(1-\nu^2) \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial M_x}{\partial y} \quad (1-2)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} = Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad (1-3) \quad \frac{\partial \theta_y}{\partial x} = -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{D(1-\nu^2)} \quad (1-4)$$

$$\frac{\partial \theta_x}{\partial x} = -\nu \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \frac{M_x}{D} \quad (1-5) \quad \frac{\partial w}{\partial x} = -\theta_x + \frac{Q_x}{\kappa G h} \quad (1-6)$$

ここに、 $q=q(x,y)$:横荷重強度、 E :弾性係数、 $G=E/2(1+\nu)$:せん断弾性係数、 ν :ポアソン比、

$h=h(x,y)$:板厚、 $D=D(x,y)=Eh^3/12(1-\nu^2)$:板剛度、 $\kappa=5/6$:せん断修正係数、

式(1.1)~(1.6)に表れないせん断力 Q_y および曲げモーメント M_y は次式により表される。

$$Q_y = \kappa G h \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \right) \quad (2-1) \quad M_y = D(1-\nu^2) \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) + \nu M_x \quad (2-2)$$

いま、 $y=0$ および $y=b$ が単純支持であることを考慮して、たわみ関数 $w(x,y)$ 、たわみ角関数 $\theta_y(x,y)$ 、 $\theta_x(x,y)$ 、せん断力関数 $Q_x(x,y)$ 、曲げモーメント関数 $M_x(x,y)$ 、ねじりモーメント関数 $M_{xy}(x,y)$ および荷重強度関数 $q(x,y)$ を次のように仮定する。

$$\begin{aligned} w(x,y) &= \sum_n w_n(x) \sin \alpha_n y, & \theta_x(x,y) &= \sum_n \theta_{x,n}(x) \sin \alpha_n y, & \theta_y(x,y) &= -\sum_n \theta_{y,n}(x) \cos \alpha_n y, \\ Q_x(x,y) &= \sum_n Q_{x,n}(x) \sin \alpha_n y, & M_x(x,y) &= \sum_n M_{x,n}(x) \sin \alpha_n y, & M_{xy}(x,y) &= -\sum_n M_{xy,n}(x) \cos \alpha_n y, \\ q(x,y) &= \sum_n q_n(x) \sin \alpha_n y, & q_n &= (2/b) \int_0^b q(x,y) \sin(2n-1)(\pi/b)y dy, & \alpha_n &= (2n-1)\pi/b \end{aligned}$$

式(3)を式(1.1)～(1.6)および式(2.1),(2.2)に代入し、三角級数関数の直交性を考慮してy方向に積分すると、連立偏微分方程式(1.1)～(1.6)は次のような連立常微分方程式に変換される。(以下では繁雑さを避けるために、 $w_m(x), \theta_{xm}(x), \dots$ を $w_m, \theta_{xm}, \dots$ と略記する。)

$$dQ_{xm}/dx = -\kappa Gh [-(2m-1)^2(\pi/b)^2 w_m + (2m-1)(\pi/b)\theta_{ym}] - q_n \tag{4-1}$$

$$dM_{xym}/dx = -\kappa Gh(2m-1)(\pi/b)w_m + [\kappa Gh + D(1-\nu^2)(2m-1)^2(\pi/b)^2]\theta_{ym} + \nu(2m-1)(\pi/b)M_{xm} \tag{4-2}$$

$$dM_{xm}/dx = Q_{xm} - (2m-1)(\pi/b)M_{xym} \tag{4-3} \quad d\theta_{ym}/dx = (2m-1)(\pi/b)\theta_{xm} + 2M_{xym}/D(1-\nu) \tag{4-4}$$

$$d\theta_{xm}/dx = -\nu(2m-1)(\pi/b)\theta_{ym} + M_{xm}/D \tag{4-5} \quad dw_m/dx = -\theta_{xm} + Q_{xm}/\kappa Gh \tag{4-6}$$

$$Q_y = \kappa Gh \sum_n [(2m-1)(\pi/b)w_m - \theta_{ym}] \cos \alpha_m (5-1) \quad M_y = \kappa Gh \sum_n [D(1-\nu^2)(2m-1)(\pi/b)\theta_{ym} + M_{xm}] \sin \alpha_m (5-2)$$

ここで、断面力 Q_x, M_x, M_{xy} および変形 w, θ_x, θ_y に関して次の無次元量： $X_1=a^2 Q_{xm}/[D_0(1-\nu^2)]$ 、 $X_2=a M_{xym}/[D_0(1-\nu^2)]$ 、 $X_3=a M_{xm}/[D_0(1-\nu^2)]$ 、 $X_4=\theta_{ym}$ 、 $X_5=\theta_{xm}$ 、 $X_6=w_m/a$ 、 $\eta=x/a$ を導入し、式(4-1)～(4-6)を無次元化したのち、積分方程式への変換と数値積分法の応用とにより、図1における任意の線要素iの諸量 X_{pi} と0～i-1番目の線要素の諸量 X_{pf} ($f=0 \sim i-1$)との関係式が求められ次式となる。

$$X_{pi} = \sum_{t=1}^6 A_{pit} X_{t0} + \sum_{t=1}^6 \sum_{k=0}^{i-1} \beta_{ik} B_{pit} X_{tk} - \sum_{k=0}^i \gamma_{pi} \beta_{ik} Q_k \tag{6}$$

ここに、 $p=1, 2, \dots, 6$ 、 $i=1, 2, \dots, n$ 、 $\beta_{ik}=\alpha_{ik}/n$
 β_{ik} は数値積分法における重み係数である。本論文においては、等分割数値積分法として、Simpsonの台形公式を用いることとする。このとき、 $\alpha_{ik}=0.5$ ($k=0, i$) or 1.0 ($k \neq 0, i$) である。

ところで、領域 $[0, i]$ を最小領域 $[0, 1]$ から始めて、順次領域を拡大しつつ、各領域のi番目の線要素の諸量 X_{pi} を式(6)より求め、これを次の領域のi-1番目の線要素の諸量として式(6)の右辺に逐次代入してゆけば、各領域の1～i-1番目の線要素の諸量はすべて消去され、結局、任意線要素iにおける諸量 X_{pi} は、この領域の境界線上($i=0$)における諸量 X_{p0} によって表されることになり、次式のように整理される。

$$X_{pi} = \sum_{d=1}^6 a_{pid} X_{d0} + q_{pi} \tag{7}$$

式(7)は、変厚矩形板の離散表示された離散解である。離散解(7)に含まれる左端境界線要素における諸量 X_{d0} は、いわゆる積分定数であり、境界条件によって決定されるべきものである。また、i番目の線要素に対応する諸量 X_{pi} を積分定数 X_{d0} に関係づける要素 a_{pid} および q_{pi} は、式(6)と式(7)の恒等性より導き出され、伝達マトリックス法における伝達マトリックスに相当するものである。

3. 数値計算例

図2に4辺単純支持板の積分定数と境界条件を示す。また、数値計算例として等分布荷重を受ける4辺単純支持板についての解析結果を表1に示す。

参考文献(1)崎山他：変厚矩形板の曲げの一般解析法，土木論集，

第338号，(2)T.Kant, E.Hinton: Mindlin plate analysis by segmentation method, ASCE, Vol.109, No.EM2.

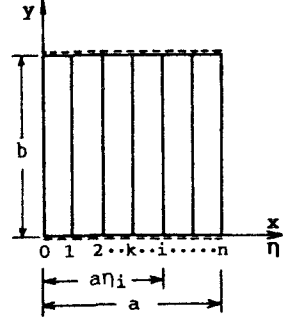


図1 座標系

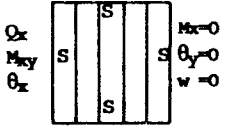
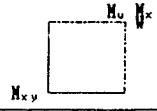


図2 積分定数と境界条件

表1 4辺単純支持板
($\nu=0.3$)



n	m	w/qa ⁴ /D	M _x /qa ²	M _y /qa ²	M _{xy} /qa ²
4	1	0.00413	0.0531	0.0530	-0.0307
	2	0.00407	0.0520	0.0480	-0.0324
	3	0.00408	0.0520	0.0491	-0.0323
	4	0.00408	0.0520	0.0488	-0.0329
	5	0.00408	0.0520	0.0489	-0.0330
D.A.M		0.00412	0.0542	-	-0.0340
8	1	0.00412	0.0501	0.0520	-0.0303
	2	0.00407	0.0486	0.0474	-0.0312
	3	0.00407	0.0489	0.0484	-0.0323
	4	0.00407	0.0488	0.0480	-0.0324
	5	0.00407	0.0488	0.0482	-0.0325
D.A.M		0.00408	0.0492	-	-0.0328
12	1	0.00412	0.0496	0.0518	-0.0302
	2	0.00406	0.0481	0.0472	-0.0319
	3	0.00407	0.0484	0.0483	-0.0322
	4	0.00407	0.0483	0.0479	-0.0324
	5	0.00407	0.0483	0.0481	-0.0324
D.A.M		0.00407	0.0484	-	-0.0325
N.A.S		0.00406	0.0479	0.0479	-0.0325

D.A.M Discrete approximate method
N.A.S Navier's Analytical Solution