

矩形板の幾何学的非線形解析

長崎大学 正 員 崎山 毅
 長崎大学 正 員 松田 浩
 九州大学 正 員 若菜啓孝
 長崎大学 ○学生員 森田千尋

1. まえがき

平板のたわみ量が板厚に近い大きさになると面内力がたわみの影響を受けて変化し、またそれらの面内力はたわみに影響を与える。本文はこれらのことを考慮した矩形板の幾何学的非線形問題に関して、基礎微分方程式の積分方程式への変換と積分方程式の近似解法の応用とにより矩形板の離散解を求め、これに基づく矩形板の解析法を提示するとともに、数値解析例として4辺固定板の解析結果を示したものである。

2. 矩形板の基礎微分方程式

平板のせん断力を Q_y, Q_x 、ねじりモーメントを M_{xy} 、曲げモーメントを M_y, M_x 、たわみ角を θ_y, θ_x 、たわみを w とすれば、板の横荷重のほかに板の中央面に作用する面内力 N_{xy}, N_y, N_x を受けた場合の、せん断変形の影響を考慮した矩形板の曲げに関する基礎微分方程式は式(1)のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + q &= 0 & \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \theta_x}{\partial x} &= \frac{M_y}{D} \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + Q_x &= 0 & \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \frac{\partial \theta_x}{\partial y} &= \frac{2M_{xy}}{D(1-\nu)} \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + Q_y &= 0 & \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x &= \frac{Q_x}{\kappa G h} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \theta_y}{\partial y} &= \frac{M_x}{D} & \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y &= \frac{Q_y}{\kappa G h} \end{aligned} \quad (1)$$

また、板の中央面上の x, y 方向の面内変位成分を u, v とすれば、面内力 N_{xy}, N_y, N_x との間には次のような関係がある。

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 & \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left\{ \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \nu \left(-\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} &= \frac{N_x}{F} \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= 0 & \frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left\{ \left(-\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \nu \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} &= \frac{N_y}{F} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{2N_{xy}}{F(1-\nu)} \end{aligned} \quad (2)$$

ここに、 $q=q(x, y)$:横荷重強度、 E :弾性係数、 $G=E/2(1+\nu)$:せん断弾性係数、 ν :ポアソン比、

$h=h(x, y)$:板厚、 $D=D(x, y)=Eh^3/12(1-\nu^2)$:板の曲げ剛度、 $\kappa=5/6$:せん断修正係数、

$F=F(x, y)=Eh/(1-\nu^2)$:板の伸び剛度、

次の無次元量、

$$\begin{aligned} X_1 &= a^2 Q_y / [D_0(1-\nu^2)], X_2 = a^2 Q_x / [D_0(1-\nu^2)], X_3 = a M_{xy} / [D_0(1-\nu^2)], X_4 = a M_y / [D_0(1-\nu^2)], \\ X_5 &= a M_x / [D_0(1-\nu^2)], X_6 = \theta_y, X_7 = \theta_x, X_8 = w/a, \eta = x/a, \zeta = y/a, a, b: \text{矩形板の縦横の辺長}, \mu = b/a, \\ h_0 &= \text{基準板厚}, D_0 = E h_0^3 / [12(1-\nu^2)]: \text{基準板曲げ剛度} \end{aligned}$$

を用いて式(1)を無次元化後、微分方程式の積分方程式への変換と積分方程式の近似解法の応用とにより、任意の離散点 (i, j) における離散解 X_{0ij} ($P=1\sim 8$)は次のように整理される。

$$X_{0ij} = \sum_{r=1}^6 \left(\sum_{k=0}^i a_{1Pijkd} \cdot X_{rkd} + \sum_{l=0}^j b_{1Pijld} \cdot X_{s0l} \right) + q_{1Pij} \quad (r=1, 3, 4, 6, 7, 8, s=2, 3, 5, 6, 7, 8)$$

同様にして次の無次元量、

$X_9=v/a$, $X_{10}=u/a$, $X_{11}=a^2N_x/[D_0(1-\nu^2)]$, $X_{12}=a^2N_y/[D_0(1-\nu^2)]$, $X_{13}=a^2N_{xy}/[D_0(1-\nu^2)]$,
を式(2)に導入すると、任意の離散点(i,j)における離散解 $X_{p,ij}$ ($P=9\sim 13$)は次のように整理される。

$$X_{p,ij} = \sum_{d=1}^4 \left(\sum_{k=0}^i a_{2p,ijkd} \cdot X_{tk0} + \sum_{l=0}^j b_{2p,ijld} \cdot X_{u0l} \right) + q_{2p,ij} \quad (t=9,10,11,12, u=9,10,11,13)$$

ここに、 X_{tk0} , X_{u0l} 等はいわゆる積分定数であり境界条件によって決定されるべきものである。また、係数 $a_{1p,ijkd}$, $b_{1p,ijld}$, $q_{1p,ij}$ 等は伝達マトリックス法における格間伝達マトリックスに相当するものである。

3. 数値計算法

- まず、面内力 N_x, N_y, N_{xy} を零として式(1)を解く。
- (a)で解かれた断面力により $\partial w/\partial x, \partial w/\partial y$ の値を求め、式(2)を解く。

(c) (b)で解かれた面内力を用いて、式(1)を解く。
以上の繰り返し計算を、たわみ w が収束するまで行う。
なお収束条件はS-1回目の中央点のたわみを $w_{c,s-1}$ とすると、

$$|w_{c,s-1} - w_{c,s}| / w_{c,s} < 10^{-3}$$

としている。

4. 解析結果

図1に示すような積分定数および境界条件もつ4辺固定正方形板に、等分布荷重が満載される場合の幾何学的非線形解析を行った。図2に中央点のたわみに関して本法の解析結果と既往の近似解法による解析結果を示す。分割数を増加するとともに既往の解析結果に近づくのがわかる。図3に中央点の圧縮応力、引張応力および膜応力に関して、既往の解析結果および線形解とともに示す。なおこのときの m は分割数である。

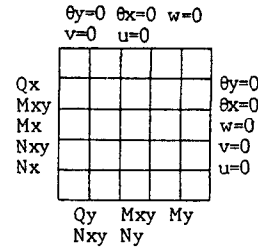


図1. 積分定数と境界条件

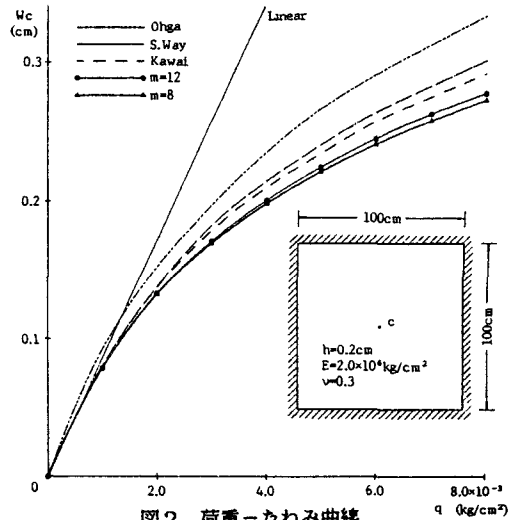


図2. 荷重-たわみ曲線

参考文献

- 1) 崎山 毅・松田 浩:変厚矩形板の曲げの一解析法、土木学会論文報告集、第338号、pp.21-28,1983.
- 2) T.Kawai and N.Yoshimura:Analysis of Large Deflection of Plates by the Finite Element Method, Int. Jour. for Numerical Methods in Engng. Vol.1, 123-133(1969).
- 3) S.Way:A Laterally Loaded Clamped Square Plate with Large Deformation, Proc. 5th Int. Congr. appl. Mech., Cambridge, Mass. (1938).
- 4) M.Ohga,T.Shigematsu and T.Hara:A Combined Finite Element-Transfer Matrix Method, JSCF, Vol.110, EM9, ppl335-1349.

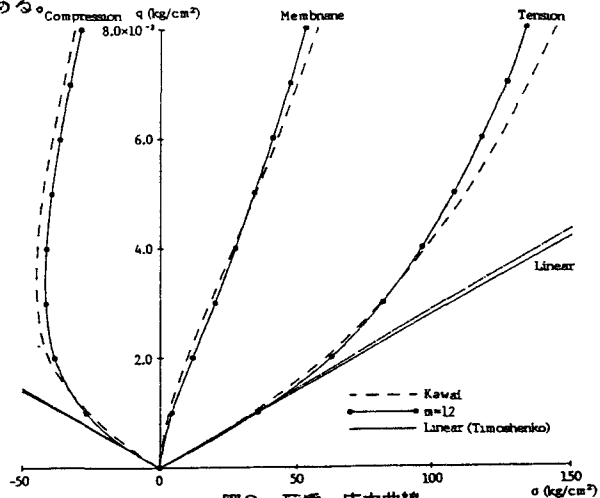


図3. 荷重-応力曲線