逐次線形化降伏条件を用いた塑性解析基本式

九州共立大学工学部　正員　三原徹治

1．緒　言　極限（塑性）解析は、構造物が支えうる最大荷重（塑性崩壊荷重）を、その弾塑性挙動を逐次追跡せずに求めることができる一方法[1]であるが、理論的には、与えられた構造・荷重形式に関するすべての可能崩壊モードを求める必要があり、対象構造物の規模が大きくなると、その適用が困難になるという問題点がある。この難点を解決するためにCohnら[2]は、すべての可能崩壊モードが基本モードとそれらの線形和として得られる組合せモードとに分類できることに着目し、線形計画法（Linear Programming, LP）による解析法を提案した。ＬＰは、初期値を設定する必要がなく、保証性の高い解が得られるという特長をもつ汎用的かつ軽便な手法であることから、以後、Cohnらの提案法を種々の構造へ応用する研究が行われてきた。特に、任意の組合せ応力を考慮しなければならない立体骨組構造物について、石川ら[3]は、非線形な降伏条件を凸多面体により固定的に線形近似する線形化降伏条件を用いて、解析基本式をＬＰとして定式化することによりその塑性解析を可能にした。しかし、固定的な線形化降伏条件は、塑性容量を安全側に評価するが、過小すぎる場合があり、また、非常に大きな計算容量を必要とする。

本報は、上記問題点を解決する一手法の開発を企図し、その解析基本式の定式化について報告するものである。すなわち、まず、部材の非線形降伏条件を比較的正確に評価し、計算量を小さくするために、算定される部材内力状態に応じて逐次線形近似する手法（逐次線形化降伏条件）[4]を用いて、塑性解析の静的定理に基づく解析基本式をＬＰとして定式化した。次に、本提案式と従来の固定的な線形化降伏条件を用いた解析基本式との計算効率に関する比較・検討を行った。

なお、定式化においては慣用の剛塑性理論に従うほか次の仮定を用いた。(1)各部材の内力と内変形の関係は、完全弾塑性型とする。(2)つり合い条件は変形前において求められるものとし、微小変形理論にしたがう。(3)作用荷重は比例的に変化するものとする。

2．解析基本式の定式化

(1)組合せ応力を受ける骨組構造物の解析基本式　塑性解析の静的定理によれば、組合せ応力を受ける骨組構造物の塑性解析基本式は、式(1)のような最適化問題として定式化される。式(1)は、式(1b)に示す部材要素に作用する内力$\mathbf{Q}$と構造物の各節点に作用する外力ベクトル$\alpha\mathbf{F}$が常につり合うという平衡条件式と、式(1c)に示す組合せ応力下での降伏条件を満足させたうえで、式(1a)の荷重係数を最大にする最適化問題を表しており、非線形な降伏条件に代えて線形化降伏条件を用いれば、目的関数式および制約条件式がすべて未知数の線形式となるため、ＬＰで解くことができる。ただし、$\mathbf{Q}$は内力ベクトル、$\mathbf{C}$は適合マトリックス、αは荷重係数、$\mathbf{F}$は基準とする外力ベクトル、$\mathbf{R}$は塑性容量ベクトル、$\mathbf{N}$は線形化降伏面に対する構造全体の単位外向法線マトリックス、記号 i および I は部材断面番号を示す記号およびその総数であり、記号Tは転置マトリックスを示す。

既知量：$\mathbf{C}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{R}$
未知量：α, $\mathbf{Q}$
目的関数：$\alpha \rightarrow \max$　(1a)
制約条件：$\mathbf{C}^T\mathbf{Q} - \alpha\mathbf{F} = \mathbf{0}$　(1b)
$\mathbf{N}^T\mathbf{Q} \leqq \mathbf{R}$　(1c)
ただし、$\mathbf{Q}^T = [\mathbf{Q}_1{}^T\ \mathbf{Q}_2{}^T\ \cdots\ \mathbf{Q}_I{}^T]$
$\mathbf{N} = \mathrm{diag}\ \mathbf{N}_i$
$\mathbf{R}^T = [\mathbf{R}_1{}^T\ \mathbf{R}_2{}^T\ \cdots\ \mathbf{R}_I{}^T]$

$(\mathbf{N}^j{}_i)^T(\mathbf{Q}^j{}_i + \Delta\mathbf{Q}^{j+1}{}_i) \leqq 1$　(2)

$\mathbf{N}^j = \mathrm{diag}\ \mathbf{N}^j{}_i$　(3)

(2)非線形降伏条件式の逐次線形化　式(1)で表される塑性解析の基本式をＬＰで解くためには、非線形降伏条件を式(1c)に示される線形化降伏条件式のように置換する必要がある。従来は、非線形降伏条件を内接する凸多面体で固定的に近似した線形近似降伏条件[3]を用いてきたが、この方法は、塑性容量を安全側に評価するが過小すぎる場合があり、また、非常に大きな計算容量を必要とする。よって、ここでは、内力状態の変化に応じて逐次、非線形降伏条件を線形化することにより塑性容量を比較的正確に評価し、さらに計算容量の縮小化を図るため、式(2)に示す逐次線形化降伏条件[4]を用いる。ただし、$\mathbf{N}^j{}_i$, $\mathbf{Q}^j{}_i$は j 回目の繰返

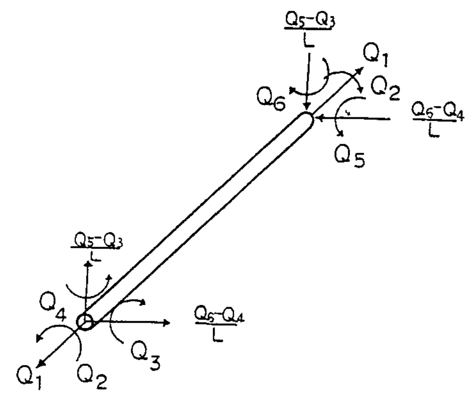
しにおける部材断面 i の単位外向法線ベクトルおよび内力ベクトル（既知量）、$\Delta\mathbf{Q}^{j+1}{}_i$ はj+1回目の繰返しにおける内力ベクトルの変化量である。ここに、$\mathbf{N}^j{}_i$ は１部材断面について１ベクトルで表されるため、構造全体の法線マトリックス$\mathbf{N}^j$ は式(3)に示すように非常にコンパクトになり、また既知内力$\mathbf{Q}^j$ の変化に応じて逐次近似するため、より正確に降伏関数値を評価することができる。

$$
\begin{array}{lll}
\text{既知量}：& \mathbf{C},\ \mathbf{F},\ \alpha^j,\ \mathbf{Q}^j,\ \mathbf{N}^j & \\
\text{未知量}：& \Delta\alpha^{j+1},\ \Delta\mathbf{Q}^{j+1} & \\
\text{目的関数}：& \Delta\alpha^{j+1} \rightarrow \max & (4a) \\
\text{制約条件}：& \mathbf{C}^T\Delta\mathbf{Q}^{j+1} - \Delta\alpha^{j+1}\mathbf{F} = \mathbf{F}^j & (4b) \\
& (\mathbf{N}^j)^T\Delta\mathbf{Q}^{j+1} \leqq \mathbf{R}^j & (4c) \\
\text{ただし、} & \mathbf{F}^j = \alpha^j\mathbf{F} - \mathbf{C}^T\mathbf{Q}^j & \\
& \mathbf{R}^j = \mathbf{I} - (\mathbf{N}^j)^T\mathbf{Q}^j &
\end{array}
$$

(3)逐次線形化降伏条件を用いた基本式　式(3)に示す$\mathbf{N}^j$ を用いた塑性解析の基本式は、式(1)において$\mathbf{N}$を$\mathbf{N}^j$ に、他の変数については、例えば$\mathbf{Q}$を$\mathbf{Q}^j + \Delta\mathbf{Q}^{j+1}$ のように、 j 回目に得られた既知量とj+1回目における未知変化量（記号△）とでそれぞれ置換して式(4)のようにＬＰ問題として得られ、収束するまで繰返し計算することにより解くことができる。ただし、 $\mathbf{I}$ は I 個の要素がすべて１のベクトルである。

３．計算効率の検討　本提案式（式(4)）の効率性を検討するため、従来の固定的な線形化降伏条件を用いた解析基本式（式(1)）との必要計算容量および計算時間について比較する。式(1)の解法としては、式(1)を「表の問題」として双対定理を用いて求めた「裏の問題」にＬＰを適用する方法[3)]や、ＬＰ分割法を適用する方法[5)]もあるが、ここでは、最も基礎的に式(1)にそのままＬＰを適用するものとする。

図-1に示すように１部材要素に６個の独立な内力をとれば、式(1)と式(4)における未知変数と制約条件式の数およびその比γ_v, γ_cは、表-1のようになる。ただし、mは部材要素数、 n は構造全体の自由度の総数であり、超ｋ角形で線形化降伏条件を近似するものとする。まず、計算容量の目安としてＬＰにおける最大マトリックスの大きさ（未知変数の数×制約条件式の数）を比較すると、式(4)の式(1)に対する縮小率は$\gamma_v \times \gamma_c$となる。次に、ＬＰの計算時間は、概略、未知変数の数に比例し制約条件式の数の２乗に比例する[3)]ので、式(4)の式(1)に対する計算時間の短縮率は$\gamma_v \times \gamma_c^2$となる。したがって、例えば、m＝３, n＝６, k＝16の小さな構造物の場合でも、必要計算容量の縮小率は約１/40，計算時間の短縮率は約１/330となり、繰返し計算をたとえ100回必要としても、式(4)の方がはるかに効率的であることがわかる。また、対象構造の規模が大きくなると計算効率はさらに改善されることになり、本提案式の大規模構造物への有効性が認められる。



図－１　部材断面力

表－１　未知変数および制約条件式の数

	未知変数の数	制約条件式の数
式(1)	６m＋２mk＋１	n＋２mk
式(4)	８m＋１	n＋２m
比	$\gamma_v = \frac{8m+1}{6m+2mk+1}$	$\gamma_c = \frac{n+2m}{n+2mk}$

４．結　言　本報は、組合せ応力を受ける立体骨組構造物に対する一つの効率的な塑性解析法の確立を企図したもので、まず、逐次線形化降伏条件を適用した塑性解析基本式をＬＰとして定式化した。次に、その計算効率について検討し、本法が計算効率上非常に優れた手法であることを示した。しかし、実構造への適用性や繰返し計算を少なくするための初期内力状態の求め方などについて、今後、検討する必要がある。

参考文献 1)田中尚：構造物の極限解析，彰国社，1966.7. 2)Cohn, M.Z., Ghosh, S.K. & Parimi, S.R.: Unified Approach to Theory of Plastic Structures, Proc. of ASCE, Vol.98,No.EM5, 1972.10. 3)石川，大野，岡元：立体骨組構造の最適塑性設計に関する一考察，土木学会論文報告集，第279号，1978.11. 4)三原，北小路，石川，太田：相補掃出法を用いた立体骨組構造のホロノミック弾塑性解析，構造工学論文集，Vol.35A，1989.3.(掲載予定) 5)石川，三原：ＬＰ分割法による骨組および連続体構造の最適塑性設計法に関する一考察，第17回マトリックス解析法研究会発表論文集，1983.7.