

直交関数系を用いた非線形構造の高速解析

九州大学工学部 学生員 脇屋泰士 正員 彦坂 照

1. 緒言

構造物の非線形挙動には、材料非線形性と幾何学的非線形性とによるものがある。これら非線形構造の平衡経路を有限要素法で求めるために荷重増分法、変位増分法、弧長増分法などが定式化されているが、何れにしても精度を上げるためには繰り返し収束計算に多大の時間を要する難点がある。本論は、荷重-変形状態の直交化を利用し、かつ線形初期剛性マトリックスのみを用いて演算時間の短縮をはかり、材料及び幾何学的非線形問題に共通に適用できる荷重増分解析の一手法を紹介したものである。

2. 解析手法

1) 仮想仕事の原理による解法の定式化

非線形構造の反復収束計算の段階では、次のように仮想変位の原理と荷重-変形状態の直交化に基づく線形解析を行う。いま線形構造物において、 n 個の独立な荷重-変位関係 $P_i \rightarrow v_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) が既知とし、それぞれを基本状態 i と呼ぶ。 P_i と v_i は一般にベクトルである。この構造物に任意の荷重 P が作用したときの変位 v の近似解を

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n \quad (1)$$

とおき、平衡条件を満たすように未定係数 λ_i ($i=1, 2, \dots, n$) を定めるものとする。式(1)の変位による内力は

$$R(v) = -\lambda_1 P_1 - \lambda_2 P_2 - \dots - \lambda_n P_n$$

と表され、 v が正解でない限り、次の不平衡力 $F(v)$ が存在する。すなわち

$$F(v) = P + R(v) \quad (2)$$

ここでは、平衡条件として $F(v) = 0$ の代わりに、仮想変位 δv に対する次の仮想変位の原理を用いる。

$$F(v) \delta v = [P + R(v)] \delta v = 0 \quad (3)$$

n 個の独立な仮想変位 $\delta v = \delta \lambda_i v_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) を式(3)に与え、 $\delta \lambda_i$ が任意のスカラーであることを考慮すれば、次式が得られる。

$$F(v) v_i = (P - \lambda_1 P_1 - \lambda_2 P_2 - \dots - \lambda_n P_n) v_i = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (4)$$

式(4)は、不平衡力ベクトル $F(v)$ が変位ベクトル v_i と直交する条件から、未定係数 λ_i ($i=1, 2, \dots, n$) が定められることを示している。なお、 n 個の独立な基本状態 $P_i \rightarrow v_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) は

$$i \neq k \quad \text{のとき} \quad P_k v_i = P_i v_k = 0 \quad (5)$$

を満たすように直交化することができ、この場合の未定係数は次式で与えられる。

$$\lambda_i = \frac{P \cdot v_i}{P_i \cdot v_i} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (6)$$

2) 荷重増分法による非線形構造解析の定式化

図-1のように、与えられた非線形構造(以下、与系と呼ぶ)の平衡点Aで荷重増分 F_1 を与えて、変位増分 v を生じる平衡点Bを求めることを考える。A-B間を線形系と仮定し、変位増分を式(1)で表す。但しここでは、式(1)の右辺第1項 $\lambda_1 v_1$ のみで可能な限り平衡条件が満たされるように未定係数 λ_1 を決定し、 $v = \lambda_1 v_1$ による不平衡力を第2項以下で順次解消するよう反復計算を行うことにする。各基本状態 i の変位ベクトル v_i は与系の適合条件のみを満たしておればよいから、常に与系の初期剛性マトリックス K を用い算

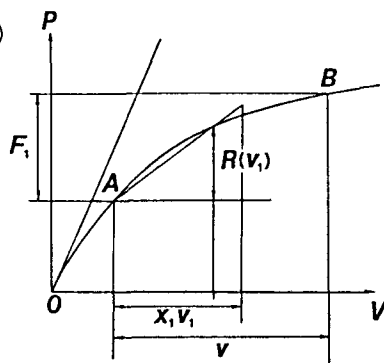


図-1 荷重増分法

定する。すなわち、まず基本状態1の変位ベクトル v_1 が $v_1 = K^{-1}F_1$ で与えられる。 v_1 は F_1 に対する真の平衡点でないで、内力 $R(v_1)$ と外力 F_1 は完全には平衡せず、次の非線形不平衡力が存在する。

$$F_{11} = F_1 + R(v_1) \quad \text{または} \quad R(v_1) = -(F_1 - F_{11}) \quad (7)$$

F_1 による変位増分 v の第1近似値を

$$v = \chi_1 v_1 \quad (8)$$

とおくとき、線形系の不平衡力は

$$F_2 = F_1 - \chi_1 (F_1 - F_{11}) \quad (9)$$

となる。仮想変位 $\delta v = \delta \chi_1 v_1$ に対して

仮想仕事の原理 $F_2 \delta v = 0$ を適用すれば

$$\{F_1 - \chi_1 (F_1 - F_{11})\} v_1 = 0 \quad \therefore \chi_1 = \frac{F_1 v_1}{(F_1 - F_{11}) v_1} \quad (10)$$

式(10)の χ_1 を式(9)に代入して得られる不平衡力 F_2 は完全に0ではないので、解の精度をさらに上げるために基本状態2の変位ベクトル v_2 を $v_2 = K^{-1}F_2$ で求め、以下、変位増分 v について所要の精度の解が得られるまで上記の手順を反復する。

3) 非線形性の取扱い

本解析法では、例えば式(7)において非線形内力 $R(v_1)$ の算定を必要とする。材料非線形内力は鋼骨組構造の弾塑性解析で通常用いられる次の仮定により算定する。

- 材料は完全弾塑性体とする。
- 部材の曲げにおける平面保持の仮定が、塑性域においても成立する。
- 部材軸方向直応力のみによる降伏を考慮し、せん断応力の影響を無視する。

幾何学的非線形内力は図-2のように、部材要素 $i-k$ の変形後の部材端軸力とせん断力を、部材回転角 α を考慮した座標変換により算定する。

3. 解析例

図-3は集中荷重 P を受ける矩形断面単純ばりの弾塑性解析を行い、スパン中点の荷重-たわみ曲線を降伏荷重 P_y と降伏たわみ δ_y で無次元表示したものである。

本法によれば、図示の要素分割で厳密解にほぼ一致した結果が得られる。

また表-1は、軸力 N とスパン中点の集中荷重 P の幾何学的非線形問題を本法により解析し、軸力 N 、スパンの要素分割数を変えた場合の中央点鉛直変位と曲げモーメントの値を厳密解¹⁾と比較したものである。非線形性のより強い $N=1000$ kNの場合について、式(1)の項数 n による中央点変位 v の収束状況を示せば図-4の通りであり、 $n=1$ ではほぼ収束していることがわかる。

参考文献

- Ch. Stutzki: Traglastberechnung räumlicher Stabwerke unter Berücksichtigung verformbarer Anschlüsse. Dissertation, Aachen 1982.

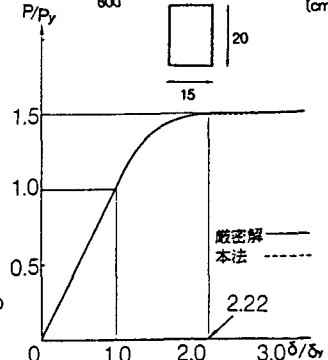
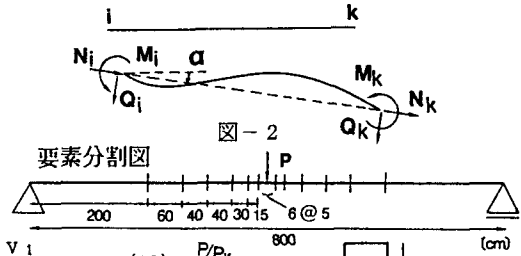


図-3 単純ばりの弾塑性解析

$\ell = 8 \text{ m}$
 $E I = 21000 \text{ kN m}^2$
 $P = 20 \text{ kN}$
 $A = 180 \text{ cm}^2$

		中点の変位 (cm)		中点の曲げ モーメント (kN m)	
軸力	厳密解				
N=400 kN	厳密解	1.157 (誤差)		44.63 (誤差)	
	要素分割数 2	1.131 (2.2%)		44.52 (0.2%)	
	要素分割数 4	1.149 (0.7%)		44.60 (0.06%)	
	要素分割数 8	1.155 (0.2%)		44.62 (0.02%)	
N=1000 kN	厳密解	1.464		54.64	
	要素分割数 2	1.362 (6.9%)		53.62 (1.9%)	
	要素分割数 4	1.432 (2.2%)		54.33 (0.6%)	
	要素分割数 8	1.455 (0.6%)		54.56 (0.1%)	

表-1 単純ばりの幾何学的非線形解析

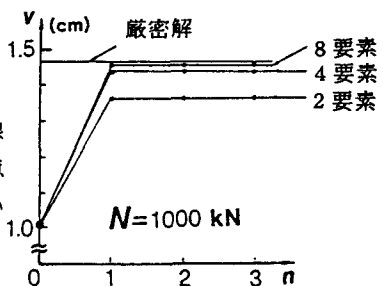


図-4 反復数 n による収束状況