三角形膜要素の幾何学的非線形理論

佐賀大学理工学部　正員　井嶋克志
正員　後藤茂夫

1．まえがき　膜構造の設計、解析においては、膜材料そのものの変形、作用応力は小さくとも、全体構造系としては、わずかな荷重や支点変位により大きな変形が生じるため、幾何学的非線形解析が必要となる。したがって、膜構造の初期形状、裁断寸法の決定あるいは設計荷重に対する解析について、これまで多くの研究がなされ、種々の解析法が提案されている。しかし、その主たる解析法も、膜材料を等価ケーブルに置換し、ケーブルネットとして解析する、あるいは、膜要素を使用していても、節点変位の関数として表した接線剛性係数が用いられているため、無応力時の裁断寸法の決定が非常に困難であるなど問題点がある。

一方、著者らの一人が示した接線剛性法[1]は、荷重増加前の先行状態の要素の断面力（以下、要素力と呼ぶ。）により接線剛性係数が表されているため、無応力時である裁断寸法から初期形状の決定、あるいはその逆の解析など容易に行うことができる。また、要素固有の剛性と、全体系としての要素の剛体変位に基づく接線剛性係数が完全に分離されているため、膜要素の剛性方程式としてどのようなものも使用できる。

以上のような観点から、本研究は膜構造解析の準備段階として、分割数に基づく要素固有の幾何学的非線形性が最も小さいと考えられる辺長変化に対応する要素力について、三角形定ひずみ膜要素の剛性方程式と、その要素力に対する接線剛性係数を示し、本法が、通常の直交座標軸と平行な要素力に対する要素剛性方程式や、接線剛性係数を使用する場合に比べて有利であることを示すものである。

2．三角形定ひずみ膜要素の剛性方程式　辺長変化に対応する要素力を設定した場合の座標系（図－1）を要素座標系A、直交座標軸に平行な要素力を設定した座標系（図－2）を要素座標系Bとし、共に3頂点が決める平面内にある。要素座標系Aの要素力$\mathbf{S}_B=(N_1,N_2,N_3)^T$と要素変形$\Delta\mathbf{s}_B=(\Delta l_1,\Delta l_2,\Delta l_3)^T$の剛性方程式は、図の寸法の基に式（1）で、要素座標系Bの要素力$\mathbf{S}_A=(U_2,U_3,V_3)^T$と要素変形$\Delta\mathbf{s}_A=(\Delta b,\Delta c,\Delta a)^T$の剛性方程式は、式（2）で表される。

$$\mathbf{S}_A=\mathbf{k}_{\theta A}\Delta\mathbf{s}_A \quad \cdots\cdots (1) \qquad\qquad \mathbf{S}_B=\mathbf{k}_{\theta B}\Delta\mathbf{s}_B \quad \cdots\cdots (2)$$

$$\mathbf{k}_{\theta A}=D\left\{\mu\begin{bmatrix} l_1^2 & \text{Sym.} & \\ -l_1 l_2 & l_2^2 & \\ -l_1 l_3 & -l_2 l_3 & l_3^2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} B_1^2 & \text{Sym.} & \\ B_1 B_2 & B_2^2 & \\ B_1 B_3 & B_2 B_3 & B_3^2\end{bmatrix}\right\} \qquad \mathbf{k}_{\theta B}=D\begin{bmatrix} a^2+\mu c^2 & \text{Sym.} & \\ -\mu bc & \mu b^2 & \\ \nu ab & 0 & b^2\end{bmatrix}$$

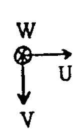
$D=Et/\{2ab(1-\nu^2)\}$, $\mu=(1-\nu)/2$, $B_i=(a_i-c_i d_i)/a_i$　(i=1~3)

ここに、E：ヤング率、t：膜厚、ν：ボアッソン比である。

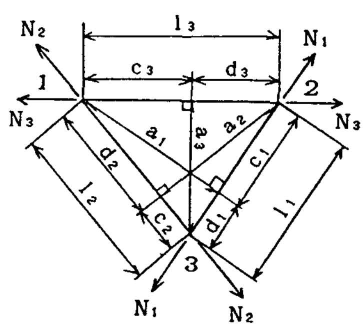
図の座標系の基に、節点力ベクトル$\Delta\mathbf{U}=(\Delta U_1,\Delta V_1,\Delta W_1,\Delta U_2,\Delta V_2,\Delta W_2,\Delta U_3,\Delta V_3,\Delta W_3)^T$と節点変位ベクトル$\Delta\mathbf{u}=(\Delta u_1,\Delta v_1,\Delta w_1,\Delta u_2,\Delta v_2,\Delta w_2,\Delta u_3,\Delta v_3,\Delta w_3)^T$の剛性係数は、

$$\mathbf{K}_{\theta A}=\mathbf{J}_A\mathbf{k}_{\theta A}\mathbf{J}_A^T \quad \cdots\cdots (3) \qquad \mathbf{K}_{\theta B}=\mathbf{J}_B\mathbf{k}_{\theta B}\mathbf{J}_B^T \quad \cdots\cdots (4)$$

$$\mathbf{J}_A=\begin{bmatrix} 0 & -c/l_2 & -1 \\ 0 & -a/l_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c/l_1 & 0 & 1 \\ -a/l_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -c/l_1 & c/l_2 & 0 \\ a/l_1 & a/l_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad \mathbf{J}_B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -a/b & -d/b \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & a/b & -c/b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$



節点力



図－1　要素座標系A

式（3）と式（4）において、$\mathbf{K}_{\theta A}$と$\mathbf{K}_{\theta B}$は微小変位理論によるものとすれば、全く一致する。

<u>3．接線剛性マトリックス</u>　一方、接線剛性係数は要素変形$\Delta \mathbf{s}$を節点変位により2次の項まで表した後、式（5）より得られるため、要素力と要素変形の設定の違いにより、要素座標系Aと要素座標系Bはそれぞれ式（6）と式（7）のように異なったものとなる。

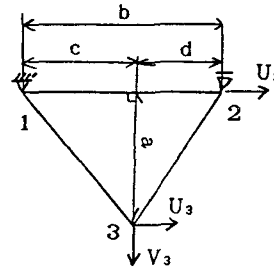
$$\mathbf{K}_G = \partial / \partial \Delta \mathbf{u}^T \{ \partial / \partial \Delta \mathbf{u} \, (\Delta \mathbf{s}^T \mathbf{S}) \} \quad \cdots\cdots (5)$$

$$\mathbf{K}_{GA} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{G31} + \mathbf{k}_{G12} & & \text{Sym.} \\ -\mathbf{k}_{G12} & \mathbf{k}_{G23} + \mathbf{k}_{G12} & \\ -\mathbf{k}_{G31} & -\mathbf{k}_{G23} & \mathbf{k}_{G23} + \mathbf{k}_{G31} \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots (6)$$

$$\mathbf{k}_{Gjk} = \frac{N_i}{l_i} \begin{bmatrix} 1-\alpha_i^2 & \text{Sym.} & \\ -\alpha_i \beta_i & 1-\beta_i^2 & \\ -\gamma_i \alpha_i & -\beta_i \gamma_i & 1-\gamma_i^2 \end{bmatrix}$$

$\alpha_i = (u_j - u_k) / l_i$, $\beta_i = (v_j - v_k) / l_i$, $\gamma_i = (w_j - w_k) / l_i$

ここに、（u, v, w）は先行状態の3頂点の座標である。



図－2　要素座標系B

$$\mathbf{K}_{GB} = \frac{1}{b} \left[\begin{array}{llllllllll} 0, & & & & & & & & & \\ -V_1, & -U_1+(dU_3-aV_3)/b, & & & & & & & & \\ 0, & 0, & -U_1-dV_1/a, & & & & & & & \\ 0, & V_2, & 0, & 0, & & & \text{Sym.} & & & \\ V_1, & -U_2-(dU_3-aV_3)/b & 0, & -V_2, & U_2-(cU_3+aV_3)/b, & & & & & \\ 0, & 0, & -U_2-dV_2/a, & 0, & 0, & U_2-cV_2/a, & & & & \\ 0, & V_3, & 0, & 0, & -V_3, & 0, & 0, & & & \\ 0, & -U_3, & 0, & 0, & U_3, & 0, & 0, & 0, & & \\ 0, & 0, & -U_3-dV_3/a, & 0, & 0, & U_3-cV_3/a, & 0, & 0, & bV_3/a & \end{array} \right] \quad \cdots\cdots (7)$$

接線剛性係数$\mathbf{K}_{GA}$と$\mathbf{K}_{GB}$を比較すれば、$\mathbf{K}_{GA}$のマトリックスの要素の方が偏りのない表示になっていることがわかる。この$\mathbf{K}_{GA}$、$\mathbf{K}_{GB}$を式（3）あるいは式（4）の剛性係数に加え、全体共通座標系に変換すれば、接線剛性係数が得られる。この接線剛性係数を使用した反復計算は次式である。

$$\Delta \mathbf{u}_{r+1} = \Delta \mathbf{u}_r + (\mathbf{K}_{\theta r} + \mathbf{K}_{Gr})^{-1} \cdot (\mathbf{U} + \Delta \mathbf{U} - \mathbf{J}_r \mathbf{S}_r) \quad \cdots\cdots (8)$$

ここに、$\mathbf{J}_r$はr回目の要素力を共通座標系の節点力に変換するマトリクスである。上式において、節点変位から要素変形を省略のない厳密な適合条件式により計算し、また、それぞれの要素座標系における要素剛性方程式を使用すれば、共にそれぞれの要素剛性に応じた厳密値に収束する。しかし、それぞれの収束解には差が生じ、これは要素力と要素変形間の幾何学的非線形性を無視したことによる誤差といえる。数値計算によるこの誤差の確認は、講演時に発表する予定であるが、一般には要素座標系Aのほうが、要素座標系Bよりも要素固有の幾何学的非線形性が小さいと考えられる。したがって、$\mathbf{K}_{\theta B}$を$\mathbf{K}_{\theta A}$と同精度とすべく、両座標系間の幾何学的非線形性を考慮して、$\mathbf{K}_{\theta B}$に加えられるべき接線剛性係数$\mathbf{K}_{\theta GB}$を算出すれば、

$$\mathbf{K}_{\theta GB} = \left[\begin{array}{lllllllll} a^2F_2, & & & & & & & & \\ aeF_2, & l_1^4F_1/b^2+e^2F_2, & & & & & & & \\ 0, & 0, & 0, & & & \text{Sym.} & & & \\ 0, & al_1^2F1/b, & 0, & a^2F_1, & & & & & \\ -al_2^2F_2/b, & -el_1^2F1/b, & 0, & -aeF_1, & e^2F_1+l_2^4F_2/b^2, & & & & \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & & & \\ -a^2F_2, & -al_1^2F_1-aeF_2, & 0, & -a^2F_1, & aeF_1+al_2^2F_2, & 0, & a^2F_1+a^2F_2, & & \\ acF_2, & -dl_1^2F_1-ceF_2, & 0, & -adF_1, & deF_1-cl_2^2F_2, & 0, & adF_1-acF_2, & d^2F_1+c^2F_2, & \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{array} \right]$$

ここに、

$F_1 = N_1/l_1^3$,

$F_2 = N_2/l_2^3$,

$e = (a^2 - cd)/b$

参考文献1)後藤：「立体構造物における接線幾何剛性……」土木学会論文報告集1983.7.