有限要素法におけるメッシュサイズとその微分について

熊本大学　学生員　北島　徳隆
熊本大学　学生員　近藤　充明
八代高専　正　員　内山　義博
熊本大学　正　員　平井　一男

1．まえがき：

有限要素法は近似解法であり要素分割を多くするほど精度は上がるはずである。しかし、計算機容量、時間の関係から無限に分割することは不可能である。本報告では応力の座標による各要素の微分を求め、それを用いて二次元弾性体の釣合方程式により、要素分割の適否の検討、計算精度のチェックを行う。

2．理論

（A）座標による応力の微分

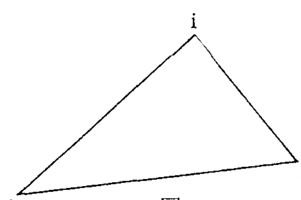
応力ベクトルと変位ベクトルの関係は次式で表せる。

$$\sigma = D B U \qquad (1)$$

$$D = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \qquad B = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} Y_{jk} & 0 & Y_{kj} & 0 & Y_{ij} & 0 \\ 0 & X_{kj} & 0 & X_{ik} & 0 & X_{ji} \\ X_{kj} & Y_{jk} & X_{ik} & Y_{ki} & X_{ji} & Y_{ij} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \times \bar{B}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix} = X_j Y_k + X_k Y_i + X_i Y_j - X_j Y_i - X_i Y_k - X_k Y_j$$

E：ヤング率　ν：ポアソン比



図－1

ここで（1）をxで微分すると次式になる。

$$\frac{\partial \sigma}{\partial X} = D\frac{\partial B}{\partial X}U + DB\frac{\partial U}{\partial X} \qquad (2)$$

また

$$\frac{\partial B}{\partial X} = -\frac{1}{\Delta^2}\frac{\partial \Delta}{\partial X}\bar{B} + \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \bar{B}}{\partial X} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \bar{B}}{\partial X} - \frac{\partial \Delta}{\partial X}B \qquad (3)$$

ここでBを各節点（i，j，k）で微分すると次式になる。

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial X_i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial \bar{B}}{\partial X_j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial \bar{B}}{\partial X_k} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

また$\partial \Delta/\partial X_i = Y_{jk} = Y_j - Y_k$，$\partial \Delta/\partial X_j = Y_{ki} = Y_k - Y_i$，$\partial \Delta/\partial X_k = Y_{ij} = Y_i - Y_j$　　（5）

これより各節点における微分値$\partial B/\partial X$を求める。

次に外力ベクトルFと変位ベクトルの関係は剛性マトリックスを用いて表すと次式になる。

$$F = K U \qquad (6)$$

（6）式のxによる微分は次式になる。

$$\frac{\partial F}{\partial X} = \frac{\partial K}{\partial X}U + K\frac{\partial U}{\partial X} \qquad (7)$$

ここで$\partial F/\partial X = 0$となることより次式が導かれる。

$$\frac{\partial U}{\partial X} = -K^{-1}\frac{\partial K}{\partial X}U = -K^{-1}U' \qquad \left(U' = \frac{\partial K}{\partial X}U\right) \qquad (8)$$

ここで剛性マトリックス　$K=\Sigma\Delta/2\times B^{T}DB$より n 番目の三角形要素に対する微分は次式となる。

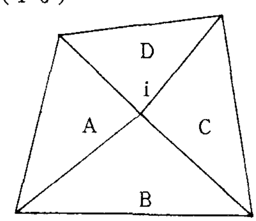
$$\frac{\partial K_n}{\partial X}=\frac{1}{2}\frac{\partial \Delta_n}{\partial X}B^{T}{}_nDB_n+\frac{\Delta_n}{2}\frac{\partial B^{T}{}_n}{\partial X}DB_n+\frac{\Delta_n}{2}B^{T}D\frac{\partial B_n}{\partial X} \qquad (9)$$

上記より応力の各節点(i ， j ， k)における微分値$\partial\sigma/\partial X$が求まる。y 方向微分も同様に求められる。

（B）平均化した応力の微分値

三角形要素の微分値は非常に局部的な部分の応力を対象とするので図－２の様に i 点に集まるいくつかの三角形要素の応力の微分値を求め、それらの和の平均として、 i 点応力の微分値と考えることによって応力の微分値を全体的に平均化する。図－２をモデルにして考えてみると、この場合は次式で求められる。

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial X_i}=\left(\frac{\partial \sigma(A)}{\partial X_i}+\frac{\partial \sigma(B)}{\partial X_i}+\frac{\partial \sigma(C)}{\partial X_i}+\frac{\partial \sigma(D)}{\partial X_i}\right)/4 \qquad (10)$$



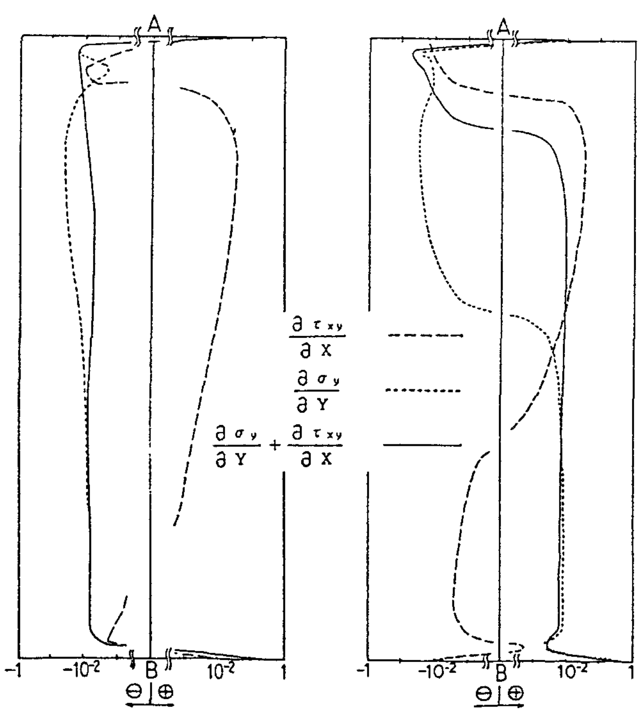
図－２

同様にして i 点における微分値、$\partial\sigma_y/\partial X_i$，$\partial\tau_{xy}/\partial X_i$，も求まる。y 方向微分も同様にして求める。ここでいま求めてきた微分を用いて２次元弾性体の釣合方程式（１１）式より各要素内の応力が一定であるかを検討しながら数値解析を行う。

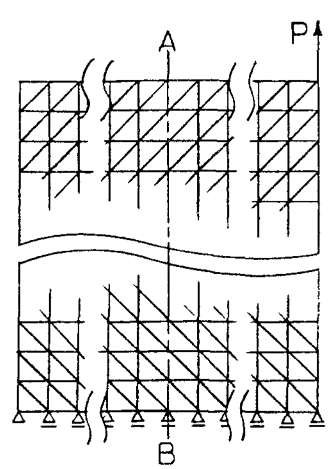
$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial X}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial Y}=0 \qquad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial X}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial Y}=0 \qquad (11)$$

３．数値計算例

図－３の長方形板を縦４０分割、横２０分割にしたメッシュ（自由度１７００）で斜線方向を図－３の上部のように切って求めた例を図－４、下部のように切ったものを図－５に示す。メッシュの斜線方向を逆にすると実線が図－４から図－５の様に変化するのが興味深い。なお、グラフはＡ－Ｂ上の節点における微分値の絶対値の対数をとり、符号は微分値に従う。



図－４　　図－５



図－３