最小二乗法による骨組構造の有限変位解析

熊本大学工学部　学生員　○山城　久富
熊本大学工学部　正　員　　小林　一郎
熊本大学工学部　学生員　　日高健一郎
熊本大学工学部　正　員　　三池　亮次

1．はじめに．

幾何学的非線形性を考慮した有限変位の離散化構造解析の研究は，計算機の急速な発達に伴いすでに多岐にわたり報告がなされている。

本報告では，この有限変位構造解析問題を最適化問題と置き換えて最適化手法（最小二乗法）を適用する一手法について報告する。

すなわち，最適化問題において，設計変数を節点変位，目的関数を剛性方程式の数値解析残差の二乗和と置き，この二乗和を最小値である零に収れんさせ，荷重増分後の釣合条件式である剛性方程式を満足するような節点変位を探索する。ここで，最小二乗最適化手法として，改訂マルカート法を用いた。

2．有限変位解析の基礎式

有限変形，特に幾何学的非線形の有限変位解析の広範かつ詳細な研究が行われている。その多くは，Greenひずみ$\mathbb{E}_g$とKirchoff応力$\mathbb{T}_k$ の積によってひずみエネルギーを表わすエネルギー理論に基づいていている。しかし，かなり変位が大きい場合の有限変位仮想仕事の定理では，Kirchoff応力$\mathbb{T}_k$ にかかる内部仮想仕事の定めるひずみ量は，Green ひずみ$\mathbb{E}_g$ に非線形ひずみ付加項を加えた形になる[1]。

例えば，軸力しか生じないトラス構造では，この非線形ひずみ付加項は部材の剛体的回転変位のみを表わし，マトリックス構造解析の基礎式において剛性マトリックスの外に分離された形になる[2]。

トラス構造の有限変形の中間状態において，節点に作用する外力を$\mathbb{P}$，節点変位を$\mathbb{d}$として変形後の状態にいたるまでに増分荷重$\Delta\mathbb{P}$を受け増分節点変位$\Delta\mathbb{d}$の応答量があるものとする。変形後の部材軸力N_iで構成される部材断面力ベクトルを$\mathbb{r}+\Delta\mathbb{r}$（$\mathbb{r}$は変形の中間状態における部材断面力ベクトル，$\Delta\mathbb{r}$は変形後の部材断面力ベクトル），$N_i$によるi番目の部材長が$l_i$の部材の中間状態からの伸びを$\Delta l_i$，$\Delta l_i$を成分とする増分伸びベクトルを$\Delta\mathbb{e}_m$，剛体回転$\Delta\theta_i$効果を示す伸びの付加項$(1-\cos\Delta\theta_i)l_i$，これを成分とする構造系の伸び付加ベクトルを$\Delta\mathbb{e}_g$とすると，増分断面力ベクトル$\Delta\mathbb{r}$に対応する伸びベクトルを$\Delta\mathbb{e}_m{}^0$は，次式のようになる。

$$\Delta\mathbb{e}_m{}^0=\Delta\mathbb{e}_m+\Delta\mathbb{e}_g \qquad (1)$$

トラスの有限ひずみ仮想仕事の定理のマトリックス表示は次式のようになる。

$$(\mathbb{P}+\Delta\mathbb{P})^t\Delta\mathbb{d}=(\mathbb{r}+\Delta\mathbb{r})^t\Delta\mathbb{e}_m{}^0 \qquad (2)$$

増分断面力ベクトル$\Delta\mathbb{r}$と増分伸びベクトル$\Delta\mathbb{e}_m$の関係は，フックの法則が成立するものとする。

$$\Delta\mathbb{r}=\mathbb{K}\Delta\mathbb{e}_m \qquad (3)$$

ここで，$\mathbb{K}$はバネ定数$k_i=E_iA_i/l_i$から成る対角マトリックスである。接続マトリックス$\mathbb{C}$および$\Delta\mathbb{C}$[3]を用いると，変形の中間状態および変形後において，外力と部材断面力ベクトルの関係は，次式が成り立つ。

$$\mathbb{P}=\mathbb{C}\mathbb{r} \qquad (4)$$

$$\mathbb{P}+\Delta\mathbb{P}=(\mathbb{C}+\Delta\mathbb{C})(\mathbb{r}+\Delta\mathbb{r}) \qquad (5)$$

式（４），（５）を式（２）に用いると，伸びベクトルと増分変位の関係は次式となる。

$$\Delta\mathbb{e}_m{}^0=(\mathbb{C}+\Delta\mathbb{C})^t\,\Delta\mathbb{d} \qquad (6)$$

式（４），（５）を変形して，式（１），（６）を代入すると，トラス構造解析の増分形の基礎式は，

$$\Delta\mathbb{P}=(\mathbb{C}+\Delta\mathbb{C})\Delta\mathbb{r}+\Delta\mathbb{C}\mathbb{r} \qquad (7)$$

ただし，$\Delta\mathbb{r}=\mathbb{K}\{(\mathbb{C}+\Delta\mathbb{C})^t\Delta\mathbb{d}-\Delta\mathbb{e}_g\}$ (8)

と得られる。

3．有限変位解析問題の最適化問題への定式化

荷重増分後の釣り合い条件式である剛性方程式（７）の数値解析残差$\mathbf{v}$の二乗和を最小になるような最適化問題を次のように表現する。

〔最適化問題Ａ〕

設計変数：$\Delta\mathbb{d}^{(i)}$

目的関数：$f=\mathbf{v}^t\mathbf{v} \longrightarrow \min$ （９）

ただし，$\mathbf{v}=\Delta\mathbb{P}-(\mathbb{C}+\Delta\mathbb{C})\Delta\mathbb{r}-\Delta\mathbb{C}\mathbb{r}$ (10)

$$\mathbb{r}=\mathbb{K}\{(\mathbb{C}+\Delta\mathbb{C})^t\Delta\mathbb{d}^{(i)}-\Delta\mathbb{e}_g\} \qquad (11)$$

ここに，節点変位$\Delta\mathbb{d}$のi番目の計算値を$\Delta\mathbb{d}^{(i)}$とし，それに対応する$\mathbb{K}$，$\mathbb{C}$等の添字は省略する。

本手法は，通常の有限変位解析に用いる荷重（変位）増分法のように応答量として変位（荷重）を$\mathbb{K}$の逆マトリックスから求める解法とは異なり，目的関数である釣り合い式の残差$\mathbf{v}$の小さくなる方向に任意の$\Delta\mathbb{d}^{(i)}$を移動する解法である。

4．本手法の適用例

骨組構造として平面ケーブル構造の大変形解析[4]への本手法の適用を行った。

〔適用例１〕単純ケーブル構造の大変形解析

図１は，各節点に先行荷重として２０tfの集中荷重が作用する初期方物線形状（点線）のケーブル構造に増分荷重$\Delta\mathbb{P}$が作用したときの最終ケーブル形状（実線）である。適用例は文献4)より引用したが同一の解が得られた。図２は，増分荷重$\Delta\mathbb{P}$を５分割に載荷して変形過程を追跡したものである。

〔適用例２〕非抗圧材を有する構造解析への適用

ケーブル構造においては，載荷荷重の状態によって，変形の途中で部材が機能しなくなる（非抗圧材）場合など構造系の変化を考慮した解析が必要である。ここでは，非坑圧材の有する構造系の解析を二項目に分けて解析する。第１は，引張材が非抗圧材に変化する場合，第２では，非抗圧材が載荷荷重によって再度部材として機能する場合である。以下の手順にしたがって解析をする。

〔　１　〕

1．STEP数 $j=1$ とし，非坑圧材が圧縮材となっても機能するものを想定して，既定の〔最適化問題Ａ〕を適用する。

2．圧縮力の降順に並び替え，$j=j+1$ とし，圧縮の大きい部材（ｉ部材とする）から軸力がゼロとなるように増分荷重 $\Delta \mathbf{P}$ を α_j 倍だけ除荷する。このときの最適化問題は次のようになる。〔最適化問題Ｂ〕

設計変数：$\Delta \mathbf{d}_j$ ，α_j

目的関数：$f_j = \mathbf{v}^t{}_j \mathbf{v}_j + w_j{}^2 \longrightarrow \min$　(12)

$\mathbf{v}_j = \alpha_j \Delta \mathbf{P} - (\mathbf{C} + \Delta \mathbf{C}_j) \Delta \mathbf{r}_j - \Delta \mathbf{C}_j \mathbf{r}$ (13)

$w_j = N_i = (r_i{}' + \Delta r_i)$　(14)

3．ｉ部材を取り出し，ｉ部材以外に圧縮の働いていた部材（ｍ部材とする）について，$m \to i$ として，２へ（STEP jのとき $\Delta \mathbf{P} - \alpha_{j-1} \Delta \mathbf{P} \to \Delta \mathbf{P}$ とする）。すべての非坑圧材について部材除去の処理が終了したら４へ進む。

4．載荷荷重の合計が，１で最初に定めた増分荷重 $\Delta \mathbf{P}$ になるように残りの荷重を載荷して再度〔最適化問題Ａ〕を適用して終了。

〔　２　〕

〔１〕の最終形状を中間状態として，新たに別の増分荷重 $\Delta \mathbf{P}$ を載荷する場合を考える。非抗圧材として取り除かれた部材（除去時の部材長を q_i とする）の一部が再度，引張材として機能することが考えられる。つまり，現時点で除去された部材の両端の節点間の距離を l_i とすると（ｉ部材が除去されていたとする）$q_i > l_i$ のとき，非抗圧材の状態のままとして考えるが，$q_i < l_i$ のときは，非坑圧材の部材が引張材として構造上存在しえる。

この場合の最適化問題は，〔最適化問題Ｂ〕の式（１４）の代わりに次式を用いればよい。

$w_j = (q_i - l_i) Q_i$，　$Q_i = E_i A_i / l_i$　(15)

図３は〔適用例２〕の解析モデルの形状と計算諸量を示す。解析結果や考察は，講演時に行う。

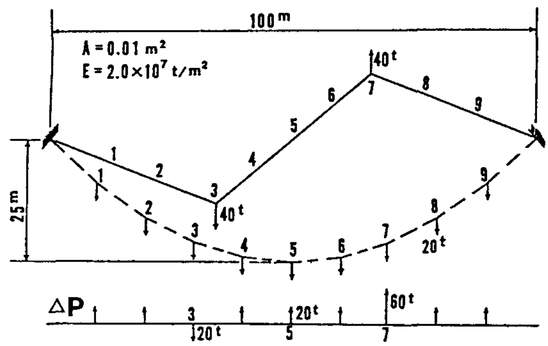

図１．ケーブルの解析モデル（単位：ｔｆ）

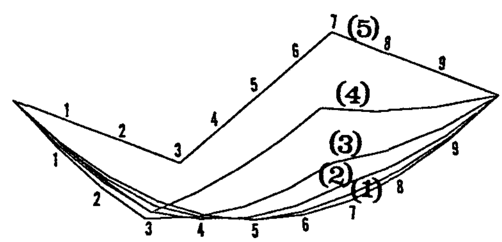

図２．ケーブルの変形過程

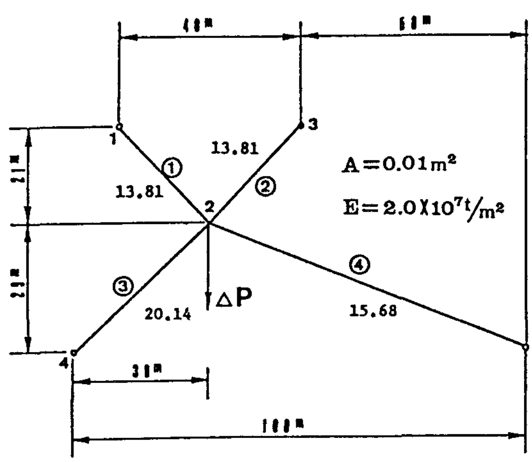

図３．４部材ケーブル

参考文献

1)三池：有限変位における増分形エネルギー基礎理論，土木学会論文報告集，第 309号,pp.41-50,1981.

2)三池，小林，久木田：有限変位仮想仕事の原理による骨組構造解析，土木学会，第39回年次学術講演会，pp.167-168,1984.

3)Livesley, R.K.：Matrix Methods of StrucutralAnalysis,Pergamon Press,1464.

4)後藤，大西，大槻，新村：非線型有限変形法（大変形法）によるトラスの大変形解析とその応用プログラム，土木学会論文報告集，第 194号，pp.55-69, 1971.