分割計算法における静定化条件の考察

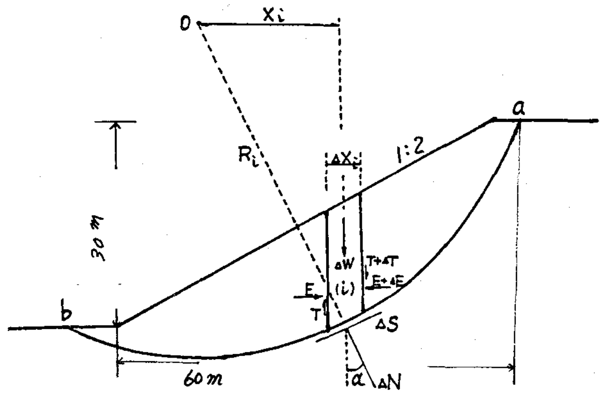
熊本大学　　今泉　繁良
東京電機大学　山口　柏樹

1．はじめに

斜面の安定解析において、分割法は安全率を計算するために広く用いられており、簡便法、Ｂｉｓｈｏｐ、Ｊａｎｂｕ、Ｓｐｅｎｃｅｒ、Ｍｏｒｇｅｎｓｔｅｒｎ等各種の計算方法が提案されている。 これらの解析法では、不静定問題を解決するために、各分割帯片に作用する力およびこれらの力の作用する着力点の位置などに対して独自の仮定がなされている。この中で、ＢｉｓｈｏｐとＪａｎｂｕの解析法ではその仮定の仕方に問題があるように思われる。すなわち、未知数と条件式の数とが一致しないということである。 ここでは、紙面の都合上、Ｂｉｓｈｏｐ法に関して、未知数と条件式の数が等しい合理的な修正法の提案を行い、それに基づいて実施した数値計算例を示す。

2．従来法の問題点と修正法の提案

図－１に分割計算のキースケッチを示す。このとき、各分割片についての極限平衡条件式、鉛直方向の力の釣合式、水平方向の力の釣合式、点０に関する全系のモーメント釣合式は、それぞれ（１）（２）（３）（４）で示される。



図－1

$$\tau_i = (c_i' + \sigma_i' \tan\phi_i')/F_s \qquad (1)$$

$$\Delta N_i = (\Delta W_i + \Delta T_i)\cos\alpha_i - \Delta E_i \sin\alpha_i \qquad (2)$$

$$\Delta S_i = (\Delta W_i + \Delta T_i)\sin\alpha_i + \Delta E_i \cos\alpha_i \qquad (3)$$

$$\Sigma \Delta W_i x_i = \Sigma \Delta S_i R_i \qquad (4)$$

これらの式より$\Delta E, \tau, \sigma'$を消去すると（５）式が得られる。

$$F_s = \frac{1}{\Sigma \Delta W_i \sin\alpha_i} \sum \left\{ c_i' \Delta x_i + (\Delta W_i - u\Delta x_i + \Delta T_i)\tan\phi_i' \right\} \frac{\sec\alpha_i}{1 + \tan\phi_i' \cdot \tan\alpha_i / F_s} \qquad (5)$$

帯片の両端ａ，ｂにおいて外力が働かないものとすれば、次式が成り立つことが必要である。

$$\Sigma \Delta E_i = \Sigma(E_{i+1} - E_i) = E_a - E_b = 0 \qquad (6) \qquad\qquad \Sigma \Delta T_i = \Sigma(T_{i+1} - T_i) = T_a - T_b = 0 \qquad (7)$$

条件式（６）は（７）と独立なものである。この（６）式は、次のようにΔT_iを用いて表すことができる。まず、（５）式の右辺のΣ内の項をm_iとするとこれは帯片ごとに異なる。

$$m_i = \{c_i' \Delta x_i + (\Delta W_i - u\Delta x_i + \Delta T_i)\tan\phi_i'\} \cdot \sec\alpha_i / (1 + \tan\phi_i' \tan\alpha_i / F_s) \qquad (8)$$

このとき、（１）（２）（３）式より$\Delta S_i = m_i / F$なる関係があり、これを（３）式に代入すると、

$$\Delta E_i = (m_i / F_s)\sec\alpha_i - (\Delta W_i + \Delta T_i)\tan\alpha \qquad (9)$$

を得る。さらに、これを（６）式に代入すれば、次に示す（10）式を得る。

$$\Sigma \{(m_i / F_s)\sec\alpha_i - (\Delta W_i + \Delta T_i)\tan\alpha_i\} = 0 \qquad (10)$$

即ち、この段階において、未知数はＦとｎ個のΔＴの合計ｎ＋１個である。条件式は（５）（７）（10）の３個であり、静定化のためにはｎ－２個の条件式が必要である。

Ｂｉｓｈｏｐ法では、静定化のためにΔＴ≡０を仮定し、未知数がF_sだけの次式で計算する。

$$F_s = \frac{1}{\Sigma \Delta W_i \sin\alpha_i} \cdot \sum \left\{ c' \Delta x_i + (\Delta W_i - u\Delta x_i)\tan\phi_i' \right\} \frac{\sec\alpha_i}{1 + \tan\phi_i' \tan\alpha_i / F_s} \qquad (11)$$

しかしながら、この仮定は、$T_1 = T_{n+1} = 0$とともに

$T_2=0$，・・・，$T_n=0$　　(12)

のn－1個の静定化条件を与えたことになり、一つ余分な条件を課したことを意味する。即ち、(12)式の仮定は（7）式の条件を満たしているが、この仮定の下で（5）式若しくは(11)式から計算されたF_sが(10)を満足するとは限らないのであり、Ｂｉｓｈｏｐ法の問題点がここにある。

この不合理性を除くために、新たに未定定数ａを導入して、

$T_2=a$，・・・，$T_n=a$　　(13)

を静定化条件とする方法を考えた。このようにすれば、条件式の数はＢｉｓｈｏｐ法と同じであるが、未知数ａが一つ増えたことにより両者の数は一致する。

表－1　円弧すべりに対する計算結果（等方均質）

計算方法	分割数	１２	２４	４８	６４	８４
Ｂｉｓｈｏｐ	Ｆｓ	1.047	1.042	1.040	1.040	1.040
	(分)	0.2	0.3	0.6	0.7	1.0
修正Ｂｉｓｈｏｐ	Ｆｓ	1.075	1.070	1.068	1.067	1.067
	(分)	1.5	2.0	4.0	5.3	8.8
Ｊａｎｂｕ	Ｆｓ	1.078	1.073	1.071	1.071	1.071
	(分)	0.8	1.6	3.5	4.7	6.3
Ｓｐｅｎｃｅｒ	Ｆｓ	1.077	1.072	1.070	1.070	1.070
	(分)	2.8	5.7	11.7	16.0	21.5

表－2　異方性を有する砂質地盤に対する計算結果

計算方法		地層傾斜角 η 0°	26.5°	45.0°	-45.0°
Ｂｉｓｈｏｐ	Ｆｓ	1.008	0.962	0.948	1.040
修正Ｂｉｓｈｏｐ	Ｆｓ	1.026	0.981	0.973	1.068
Ｊａｎｂｕ	Ｆｓ	1.029	0.981	0.975	1.071
Ｓｐｅｎｃｅｒ	Ｆｓ	1.028	0.980	0.973	1.070

具体的計算としては逐次解法で実施した。すなわち、ａの初期値としてa_0を定め、（5）式によって一次近似値としてのF_sを計算する。このa_0とF_sとが(10)式を満足すれば良いが、満足しない場合にはF_sを(10)式に代入したときこれを満足するようなa'を計算する。このa'を次の設定値として、式（5）と(10)の両方を満足するまで繰り返し計算を実施する。

3　計算例

図－1に示したような均一地盤（C＝1.2tf／m^2、γ＝2.0tf／m^3、ϕ'=40°、r_u=0.5）における円形すべり面を対象として、Ｂｉｓｈｏｐ法、修正Ｂｉｓｈｏｐ法、Ｓｐｅｎｃｅｒ法、Ｊａｎｂｕ法に基づく安定計算を実施し、表－1にその計算結果を示した。まず、分割片数を１２、２４、４８、６４、８４と変化させたとき、安全率Ｆは分割数が少ない時やや大きめ（0.6%程度）の値となるが、６４分割以上では一定値を与えている。分割片数を６４としたときの安全率F_sをみると、従来のＢｉｓｈｏｐ法の値はその他の計算法に比べて３％程度低く、精度において多少劣る。これに対して、修正Ｂｉｓｈｏｐ法はＳｐｅｎｃｅｒ法・Ｊａｎｂｕ法にかなり近い値となり幾分経済的な設計に役立つことがわかる。

次に、異方性を有する砂質地盤が図－1と同じような円形すべりを生じる場合の安定解析を行った。粒子の長軸の配列方向が水平に対してなす角をη、最大主応力が粒子配列面の法線と角βをなして作用したときのせん断強度常数をϕ'_βとすると、分割片ｉにおける最大主応力σはすべり線と45－ϕ'_i/2 の角度をなしているので、η、β、ϕ_iの関係は次のように表すことができる。

$$\beta = 45^\circ + \eta + \phi_{\beta i}/2 - \alpha_i \quad (14) \qquad \phi'_\beta = \phi'_{\beta=0} + (\phi'_{\beta=90} - \phi'_{\beta=0})(\beta - 30)/60 \quad (15)$$

安定計算においては、各分割片ごとに(14)と(15)式の両方を満足するϕの値を決定し、これを用いて安全率が計算される。

$\phi'_{\beta=0}$=40°、$\phi'_{\beta=90}$=36°、分割数を64として計算した結果が表－２である。いずれの計算法においても、地層の傾斜角がη＝45.0の場合に最小値を与え、η＝-45.0 の場合に最大値を与えており、前者は後者の９割程度の値となっている。また、表－1に示した等方性を仮定した安定計算の結果は、地層の傾斜と異方性を考慮したときの受け盤状態の場合に相当する値に等しくなっている。したがって、$\phi'_{\beta=90}/\phi'_{\beta=0}$=0.9程度の異方性を有する流れ盤のような斜面の安定解析に際して、等方性を仮定した解析を実施すると１割ほど大きめな安全率を評価することになる。