開水路往復流れにおける移流分散係数

九州大学工学部　　学生員○宮原　昌宏
九州大学工学部　　正　員　粟谷　陽一

1．まえがき　周期的に流向を変化する開水路均質流れにおける移流分散の問題は、種々研究なされているが[1)2)]、未だ不明瞭な点が多い。著者らは、深さに比べて幅が十分大きな開水路における周期的な流れにおいて、流速分布、乱れ分布は、その瞬間の平均流速と等しい等流に同じと仮定し、流下方向に一様な濃度勾配を仮定して移流分散係数を算定した。[2)] この場合、濃度の幅方向混合時間が流速の変動周期Tに比べて長い場合には、僅かでも断面平均流に定常成分（固有流）U_Fがあれば、幅方向濃度分布に大きな影響を及ぼすことが知られ、往復流成分の代表流速をU_Tとするとき、断面内流速分布及び周期を一定にすると、$D_L \propto B^2 U_F / H U_T$で近似される。　一方、一周期Tに対する流下方向の平均濃度分布は、

$$U_F \, d\bar{c}/dx = d/dx(D_L \, \partial\bar{c}/\partial x)$$

で与えられるから、平均の物質流束が0の時は、

$$\bar{c} = \bar{c}_0 \exp((U_F/D_L)x)$$

となり、x方向の勾配は一様でない。横幅方向の混合時間が長い時は、平均流に乗るため、混合時間に移流する距離だけ隔たる2点では$\bar{c}$の値が異なることを考えると、断面内濃度分布も影響を受け、従って移流分散係数も、一定の濃度勾配を仮定した場合と異なることも考えられる。

この様な場合に対して数値計算を行って、移流分散係数の比較を試みた。

2．一様濃度勾配に対する数値計算

開水路の等流において、流下方向、幅方向にx，y軸を取り、（x，y）点における深さをhとし、深さに対する平均流速をuとする。水路幅をBとすると、粗度係数nを用いて、h《 Bと仮定すると、

$$u = h^{2/3} I^{1/2} / n$$

平均流速は

$$U = (I^{1/2}/n) \int_0^B h^{5/3} dy \Big/ \int_0^B h \, dy \equiv I^{1/2}/K_u n$$

従って　$u = h^{2/3} U \int_0^B h \, dy \Big/ \int_0^B h^{5/3} dy$

また、拡散方程式は、横方向拡散係数をeとおくと、

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial y}\left(eh\frac{\partial c}{\partial y}\right)$$

ここで　$e = a u_* h = a k_u n g^{1/2} h^{3/2} |U|$

無次元パラメータ　$\eta = y/B$　　$\zeta = h/H$（Hは代表深さ）　$\xi = K_e H x/B^2$

$\theta = (K_e H/B^2) \int^t |U| \, dt$　　$K_e = a K_u n g^{1/2} H^{-1/6}$

を用いると無次元の拡散方程式

$$\frac{\partial c}{\partial \theta} + \frac{U}{|U|}\zeta^{2/3}\frac{\partial c}{\partial \xi} = \frac{1}{\zeta}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\zeta^{5/2}\frac{\partial c}{\partial \eta}\right) \quad (1)$$

を得る。

ここで前項の仮定を用いて、ξに関しては指数関数分布

$$c = \hat{c}\, e^{\lambda\xi} \quad (2)$$

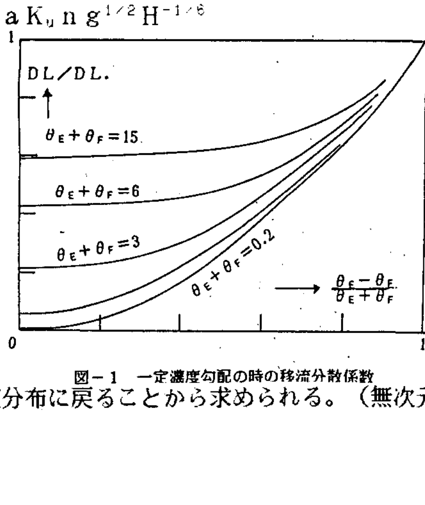
を仮定すると

$$\frac{\partial c}{\partial \theta} + \lambda\frac{U}{|U|}\zeta^{2/3}\hat{c} = \frac{1}{\zeta}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\zeta^{5/2}\frac{\partial \hat{c}}{\partial \eta}\right) \quad (3)$$

ここで、1周期の中で、U＞0の時間をθ_+、U＜0の時間をθ_-とすると、λはcが1周期（$\theta_+ + \theta_-$）後にもとの濃度分布に戻ることから求められる。（無次元化された）分散係数D_Lは

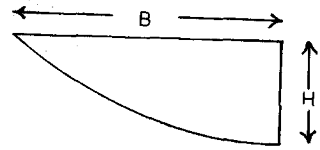
$$\frac{\theta_+ - \theta_-}{\lambda(\theta_+ + \theta_-)}$$

で与えられる。



図－1　一定濃度勾配の時の移流分散係数

2－1．一様濃度勾配



ここでは右図のように幅Bの開水路において、水路床を $h=z(2-z)$ とする。その断面の半分のモデルで式（1）の解を求める数値計算を行った。y方向に断面を10分割することとし、便宜上 $h=1\sim9$ に対し、$(n/10)^{2.5}*B$ の点で分割した。

流れは θ_E と θ_F とを定めて $0<\theta<\theta_E$ で $\alpha=1$、$\theta_E<\theta<\theta_E+\theta_F$ で $\alpha=-1$ となるものとした。結果は一方向流れにおける分散係数を D_{L*} として D_L/D_{L*} の値を示した図－（1）のようになり、周期が短い場合 D_L の値は $(\theta_E-\theta_F)$ が小さいほど0に近づき、その増加は著しく、周期が長い場合 $(\theta_E-\theta_F)$ が少なくてもある程度大きな値を示し、その増加はにぶい。そしていずれの周期においても $(\theta_E-\theta_F)$ の値を大きくしていくと一定値に近づく。

2－2．物質流束がない場合

平均流速は0でないが、物質流束が0となる場合について式（3）の数値シュミレーションを試みた。（各区分を1,2,3とする）

簡単なモデルとして、水路を3等分して、各区分中の流速を1:2:3とし、1と2、2と3との間に一定の交換を考える。したがって、各区分の拡散方程式を

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial c_1}{\partial\theta}=\alpha\dfrac{\partial c_1}{\partial\xi}+c_2-c_1\\[2mm]
\dfrac{\partial c_2}{\partial\theta}=2\alpha\dfrac{\partial c_2}{\partial\xi}+c_1-2c_2+c_3\\[2mm]
\dfrac{\partial c_3}{\partial\theta}=3\alpha\dfrac{\partial c_3}{\partial\xi}+c_2-c_3
\end{cases}
$$

とした。ここに α は θ の関数で、-1または1の値をとるものとした。さらに、ξ に関して指数関数を仮定し $c_i=\hat{c}_i\,e^{\lambda\xi}$ とおくと

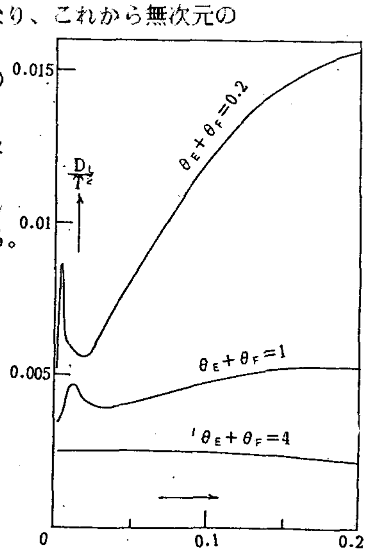
$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial c_1}{\partial\theta}=c_2-(1-\alpha\lambda)c_1\\[2mm]
\dfrac{\partial c_2}{\partial\theta}=c_1+c_3-(2-2\alpha\lambda)c_2\\[2mm]
\dfrac{\partial c_3}{\partial\theta}=c_2-(1-3\alpha\lambda)c_3
\end{cases}
$$

となる。前同様に $0<\theta<\theta_E$ で $\alpha=1$、$\theta_E<\theta<\theta_E+\theta_F$ で $\alpha=-1$ とした時、$\theta=0$ と $\theta=\theta_E+\theta_F$ とで c_1、c_2、c_3 が同一の値を持つように λ_1 の値を定めることができる。固有流速は $(\theta_E-\theta_F)/(\theta_E+\theta_F)$ となり、これから無次元の移流分散係数 D_L は

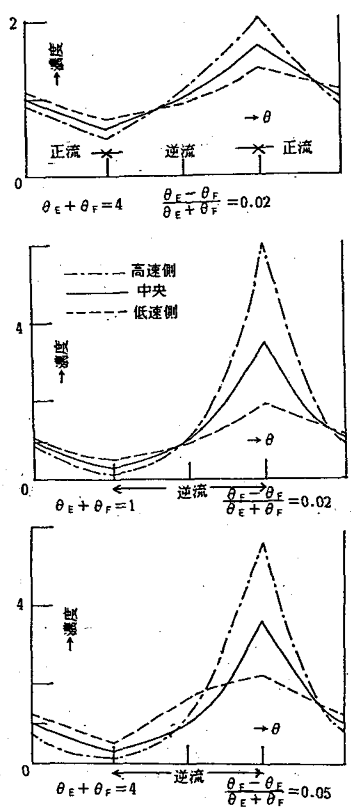
$D_L=1/\lambda\cdot(\theta_E-\theta_F)/(\theta_E+\theta_F)$

で与えられることになる。

計算結果の例を図－（2）に、また濃度分布の変化の概略の例を図－（3）に示す。図－（1）と比較してかなり傾向的な相違が認められる。



図－2　質量流束0の時の移流分散係数



図－3　濃度分布の変化

参考文献

1）福岡捷二：第19回水理講演会論文集

2）古本・粟谷：九州大学工学部集報47巻4号