移流問題の高精度数値解法の開発

九州大学　学生員○朝位孝二　　佐賀大学　正　員　大串浩一郎
九州大学　正　員　小松利光　　九州大学　学生員　相良　誠

1．はじめに　Passiveな移流物質の問題を数値的に解く場合、小松ら[1)]が提案した6-point schemeは有力な数値計算法の１つである。このschemeは境界付近の計算では、境界外２点を推定する必要がある。境界外２点を推定するには1 time step前及び2 time step前の境界の値を必要とするため境界条件の取扱は多次元問題になるにつれ複雑さを増す。また拡散がある場合には推定した２点が計算誤差を増大させる原因になる可能性がある。本研究では、現在のtime stepの値及び1 time step後の境界の値のみを用いて計算領域内を精度良く計算できる方法を検討した。

2．半陰的差分スキーム

一次元の移流方程式を6-point schemeで計算する場合、図－１に示すように境界条件が与えられている場合、C_4^{n+1}以降の点しか計算することができない。つまりC_2^{n+1},C_3^{n+1}は別のスキームで計算しなければならない。さらに下流境界ではC_{N-1}^{n+1}，C_N^{n+1}（Nはx方向の最大格子点数）が6-point schemeでは計算できない。そこでC_2^{n+1}，C_3^{n+1}，C_{N-1}^{n+1}，C_N^{n+1}の４点の計算は以下に示す差分スキームを用いて，その他の点は6-point schemeで解くことにする。

Pure advectionの基礎式は次のとうりである。

$$\frac{\partial C}{\partial t}+U\frac{\partial C}{\partial x}=0 \qquad (1)$$

上式を差分化すると

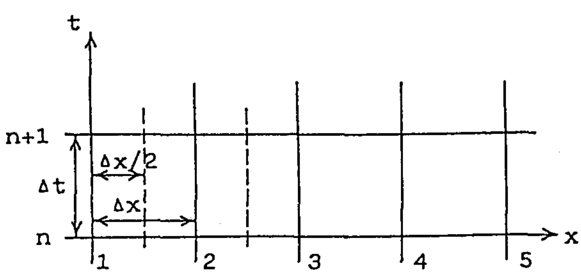
$$\left(\frac{C_I^{n+1}-C_I^n}{2\Delta t}+\frac{C_{I-1}^{n+1}-C_{I-1}^n}{2\Delta t}\right)+U\left(\frac{C_I^n-C_{I-1}^n}{2\Delta x}+\frac{C_I^{n+1}-C_{I-1}^{n+1}}{2\Delta x}\right)=0 \qquad (2)$$

式（2）を整理すると

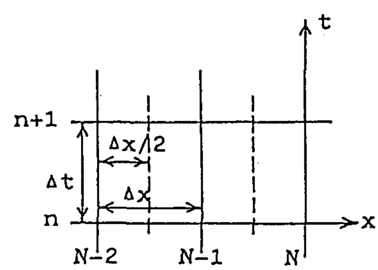
$$C_I^{n+1}=C_{I-1}^n+\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\left(C_I^n-C_{I-1}^{n+1}\right) \qquad (I=2,3,N-1,N) \qquad (2)'$$

ここに

この差分スキームはn+1 time stepの値を用いているので半陰的なスキームである。



図－１　上流側境界付近の
一次元計算格子



図－２　下流側境界付近の
二次元計算格子

このスキームの安定性を考察する。安定基準としてvon Neumannの安定条件を用いる。式（2)'に
$ze^{i\beta x}$を代入し整理すると

$$Z = \frac{\eta + (\cos\theta - i\sin\theta)}{1 + \eta(\cos\theta - i\sin\theta)}$$

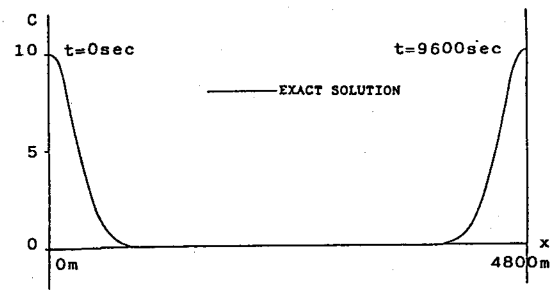
を得る。

ここに、$\theta \equiv \beta \Delta x$, $\eta \equiv (1-\alpha) / (1+\alpha)$

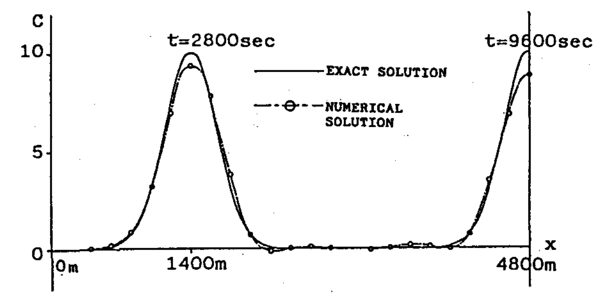
$|Z| \leqq 1$であれば、このスキームは安定である。このことより式（2）′の安定性を調べると、$\alpha = -1$以外では安定である。 6-point schemeのαの取り得る範囲は$0 \leqq \alpha \leqq 1$なのでこの範囲において式（2）′は安定である。

<u>３．計算結果</u>　モデル計算として図－３に示すようにピーク濃度１０,分散２６４mのガウス型濃度分布でｘ＝０の点で濃度の中心がくるような初期分布を考える。Δｘ＝２００m，Δｔ＝１００sec，流速０．５m/secで９６００秒間下流側に移流させる。ｔ＝９６００秒後の厳密解はｘ＝４８００mにピークの中心がくるような分布になる。図－４はｔ＝２８００秒後及びｔ＝９６００秒後の計算結果である。ｔ＝２８００秒後の濃度分布は位相誤差が少し現れている。ｔ＝９６００秒後の濃度分布はピークの値がダンピングしてはいるが負の濃度や振動は小さい。しかしながら、位相誤差やピークのダンピングは境界付近の計算に用いた差分スキームの精度に起因すると考えられる。そこで境界付近のみ計算格子間隔を細かくしてモデル計算を行ってみる。図－１，２に示すように境界付近のみ格子間隔をΔｘ／２＝１００mにして、そのほかの条件は前述の条件を用いて移流計算を行った。その結果を図－５に示す。ピークのダンピングや位相誤差が改善されていることがわかる。

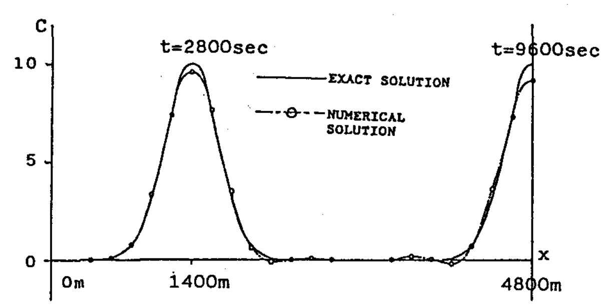
<u>４．結論</u>　本研究では境界付近の取扱のための6-point schemeとＦ．Ｄ．Ｍとのハイブリッドな計算方法を提案した。互いのスキームの精度の差から境界付近のみ格子間隔を細かくすることを余儀なくされたが、実用上は、計算回数を大幅に増すことなく精度を維持できる事が示唆された。このことはさらに２次元問題において、複雑な境界をもつ水域では、境界付近のみをＦ．Ｄ．Ｍで計算し、内部領域を6-point schemeで計算するハイブリッドな計算方法を確立できることを示唆するものである。



図－３　一次元移流



図－４　一次元移流計算結果



図－５　一次元移流計算結果

５．参考文献

1) Komatsu,T.,Holly,F.M.Jr.,Nakashiki,N.and Ohgushi,K.(1985),Journal of Hydroscience and Hydraulic Engineering,3,No.2,15-30