

移流拡散の数値計算に関する精度の検証について

佐賀大学理工学部 学○ 佐野 滝雄
 佐賀大学理工学部 正 大串浩一郎
 佐賀大学理工学部 正 渡辺 訓甫

1. はじめに

河川や海域において、passiveな物質の拡散予測を行うためには少なくとも1次元または2次元の移流拡散方程式を解かなければならない。数値的にこの方程式を解く手段としては、FDM、FEM、特性曲線法等が挙げられ、各方面で高精度の計算手法が提案されている。

FDMはその計算式の構成が分かりやすく、古くから用いられてきた手法である。しかし、普通は直交座標を使用するため、複雑な地形的境界に対して適用が難しいという欠点がある。FEMはごく最近、流体の数値計算に対しても用いられるようになったもので、数学的な記述はFDMよりも複雑であるが、要素毎に局所座標系を用いるため複雑な境界にも容易に適用でき、また汎用性プログラムを作成することが可能である。特性曲線法は、移流の計算に対して非常に精度の良い手法であるが、分類からいうとFDMに含まれるかも知れない。

これらの計算手法の中には多くの手法が含まれており、実際の移流拡散の計算でお互いの比較をすることは得策ではない。そこで本報では、簡単な計算法の比較をする方法としてvon Neumannの安定計算を利用し、純移流並びに移流拡散について比較計算を行った。

2. von Neumannの方法

1次元移流拡散方程式は、拡散係数Dを定数と仮定すれば次式で表される。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (1)$$

(1)式の厳密解をFourier級数に展開できるとすれば、解は次式のように表現できる。

$$C(x, t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m \exp\{j(\sigma_m x - \beta_m t)\} \quad (2)$$

ここで、 $j = \sqrt{-1}$ 、 A_m ：振幅、 σ_m ：波数（ $=2\pi/L_m$ ）、 L_m ：m番目の成分の波長、 β_m ：周波数である。uが一定の場合(1)式は線形となるので、m番目の成分の波についてのみ調べればよい。

代入して整理すると、厳密解の増幅率は、単位時間ステップ δt 当り次式のようなになる。

$$|Q(L_m/\delta x)| = \exp\{-4\pi^2 D/(\delta x)^2\} \quad (\delta x \text{は計算格子幅}) \quad (3)$$

3. 計算法の精度の検証と結論

ここで、各種の計算法について上記の計算にしたがって増幅率Qを計算した(表-1)。なお、図中の記号Cr、Kは、それぞれクーラン数 $Cr = u \delta t / \delta x$ 、拡散数 $K = D \delta t / (\delta x)^2$ である。FEMについては上流型 θ 法(陰型式)、陽的オイラー法を計算し、FDMについては風上差分、Lax-Wendroff法、6-point法について計算した。なお、FDMの拡散に関する計算は一般化されたCrank-Nicholson法を用いた。厳密解は、純移流の場合($D=0$)は $Q=1$ であるが、拡散を伴う場合には高波数側がより減衰する。この性質をより正確に表現できる計算法が精度が良いと考えられる。図-1から図-6に示すようにFDMとFEMについて比較するとFDMの方が厳密解に近いようである。確かに、上流型FEMでは最適な α の値が存在するが、一般的に上述のようなことが言える。これは、人工粘性の影響であり、計算する際は十分な注意が必要であると思われる。また、今回報告しなかった位相誤差についても同様の解析が可能であることも付記しておく。

4. 参考文献

- (1) 平岡正勝・古市徹・田中宏明：移流拡散方程式の数値解の安定性解析，土木学会論文報告集，第319号，PP.77-85，1982。
 (2) 川原睦人：有限要素法流体解析，日科技連，PP.141-191，1985。

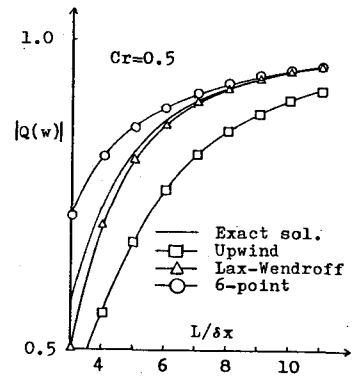
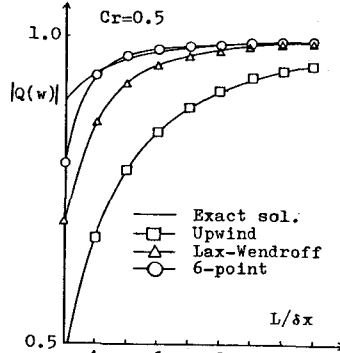
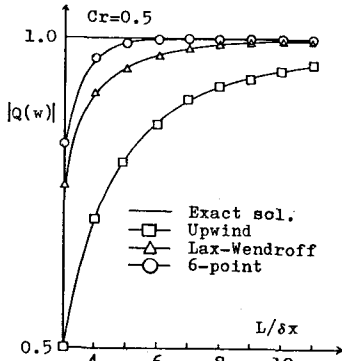


図-1 FDMの精度比較 ($D=0\text{m}^2/\text{s}$)

図-2 FDMの精度比較 ($D=10\text{m}^2/\text{s}$)

図-3 FDMの精度比較 ($D=50\text{m}^2/\text{s}$)

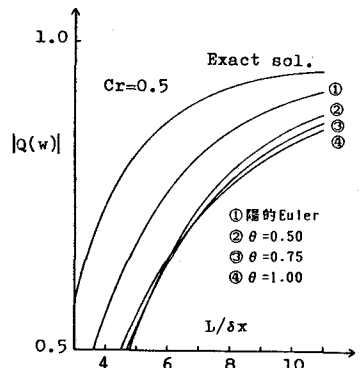
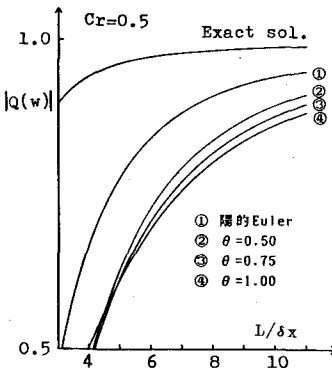
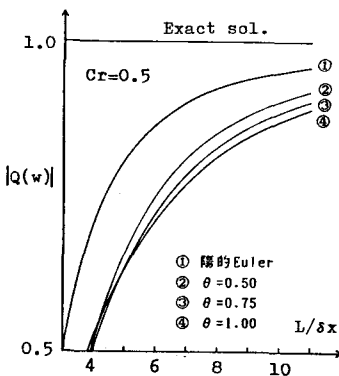


図-4 FEMの精度比較 ($D=0\text{m}^2/\text{s}$)

図-5 FEMの精度比較 ($D=10\text{m}^2/\text{s}$)

図-6 FEMの精度比較 ($D=50\text{m}^2/\text{s}$)

表-1 各種計算法の増幅率

FEM(θ 法)	$Q(w) = \frac{\{\frac{1}{3} - \theta(2K + Cr\alpha)\}\cos(w) + \{\frac{2}{3} + \theta(2K + Cr\alpha)\} + jCr\theta\sin(w)}{\{\frac{1}{3} + (1-\theta)(2K + Cr\alpha)\}\cos(w) + \{\frac{2}{3} + (1-\theta)(2K + Cr\alpha)\} + jCr(1-\theta)\sin(w)}$
FEM(陽的 差分法)	$Q(w) = 1 + (2K + Cr\alpha)(\cos(w) - 1) + jCr\sin(w)$
風上差分	$Q(w) = 1 + (Cr + 2K)(\cos(w) - 1) - jCr\sin(w)$
Lax-Wendroff	$Q(w) = 1 + (Cr^2 + 2K)(\cos(w) - 1) - jCr\sin(w)$
6-point法	$Q(w) = \{a_1\cos(3w) + (a_2 + a_6)\cos(2w) + (a_3 + a_5 + 2K)\cos(w) + a_4 - 2K\} + j\{-a_1\sin(3w) + (-a_2 + a_6)\sin(2w) + (-a_3 + a_5)\sin(w)\}$