

k - ε 方程式の構成項の再評価

九州大学工学部 学生員 河野 松夫

九州大学工学部 正 員 小松 利光 柴田 敏彦

九州大学工学部 正 員 粟谷 陽一 松永 信博

1. はじめに

乱流現象を解明する一つのアプローチとしてレイノルズ方程式に様々な仮定と近似を行い、方程式系を閉じさせる手法がある。最近では、k-εモデルが乱流現象をある程度シミュレートすることのできるモデルとして注目を集め始めている。しかしながら、k-ε方程式を構成する項に導入されている種々の普遍定数は未だ確定されておらず、一般に用いられている値に疑問が残されている。これが、k-εモデルによる解析結果と実測結果との間に差異を生じる原因の一つであろうと推測される。

本研究の目的は、比較的簡単な流れ場にk-εモデルを適用し、物理的考察と実験的な根拠に基づいてk-ε方程式の普遍定数を評価し直すことである。

2. k-εモデルの普遍定数の再評価

従来用いられている乱れエネルギーk及びエネルギー散逸率εを支配するk-ε方程式は次の通りである。

$$\begin{aligned} \frac{Dk}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_k \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) - \overline{u_i u_i} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \varepsilon \\ \frac{D\varepsilon}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_\varepsilon \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) - C_{\varepsilon 1} \left(\frac{\varepsilon}{k} \right) \overline{u_i u_i} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - C_{\varepsilon 2} \left(\frac{\varepsilon}{k} \right) \varepsilon \end{aligned} \quad (1)$$

$$C_k = 0.09, C_\varepsilon = 0.0692, C_{\varepsilon 1} = 1.43, C_{\varepsilon 2} = 1.92$$

ここで示された普遍定数の値を、3種類の比較的簡単な流れ場を考えることにより再評価してみよう。

2.1 一様減衰乱流

一様乱流が時間的に減衰する場合において、(1)式は

$$\frac{\partial k}{\partial t} = -\varepsilon, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -C_{\varepsilon 2} \left(\frac{\varepsilon}{k} \right) \varepsilon \quad (2)$$

と簡単化される。ここで、仮想原点 t_x を導入し、kとεの減衰を次のように仮定する。

$$k = A(t - t_x)^{-\alpha}, \quad \varepsilon = B(t - t_x)^{-\beta} \quad (3)$$

(3)式を(2)式に代入し、指数 α 、 β と係数 $C_{\varepsilon 2}$ との関係を求めると

$$\beta = \alpha + 1, \quad \alpha \beta = C_{\varepsilon 1} \quad (4)$$

を得る。次に実験的結果に基づき α の値を評価しよう。一様乱流の減衰過程は図-1に示すように2つの格子を静止流体中で鉛直方向に振動させ、乱れが一様に形成された上で格子振動を停止することにより得られる。振動停止後、水平速度成分 u' と鉛直速度成分 w' をLDVを用いて測定した。測定回数は50回で、乱れエネルギーkを $2\overline{u'^2 + w'^2}$ によって評価した。ここで、 $\bar{}$ は50回のアンサンブル平均を意味する。

図-2は減衰する乱れエネルギーの測定結果の一例を示す。格子の振動数及び振動幅はそれぞれ4.0Hzと4.0cmであった。この時 t_x は0.2秒で、それは $k(t)$ が t の十分大きい領域で

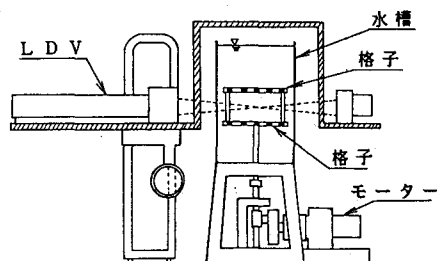


図-1 一様乱流減衰を測定するための実験装置

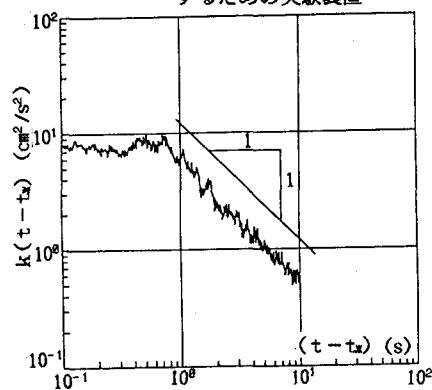


図-2 一様乱流のエネルギーの減衰

t^{-1} に比例して減衰することから、広範囲で $k(t-t_x)$ が $(t-t_x)^{-1}$ に比例するように試行錯誤により決定された。この図より明らかなように $\alpha=1.0$ である。従って、(4)式より

$$C_{\varepsilon 2}=2.0 \quad (5)$$

となる。

2.2 一様格子乱流

一様格子乱流において、 k - ε 方程式は、

$$U \frac{\partial k}{\partial x} = -\varepsilon, \quad U \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = -C_{\varepsilon 2} \left(\frac{\varepsilon}{k} \right) \varepsilon \quad (6)$$

となる。ここで、 x は一様流 U を持つ流れ方向にとった座標である。 k と ε に x のべき乗を仮定し、仮想原点 x_x を用いて

$$k=A(x-x_x)^{-\alpha}, \quad \varepsilon=B(x-x_x)^{-\beta} \quad (7)$$

と表す。(7)式を(6)式に代入し、 α 、 β を $C_{\varepsilon 2}$ との関係と求めると

$$\beta=\alpha+1, \quad \beta/\alpha=C_{\varepsilon 2} \quad (8)$$

となる。ここで、一様格子乱流では乱れエネルギーは $(x-x_x)^{-1}$ に比例して減衰するという一般によく知られた結果を用いると

$$C_{\varepsilon 2}=2.0$$

を得る。これは一様減衰乱流と同じ結果であり、(1)式で示された $C_{\varepsilon 2}$ の値に近いことがわかる。

2.3 振動格子乱流

振動格子乱流において、(1)式は

$$0 = \frac{d}{dz} \left(C_k \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{dk}{dz} \right) - \varepsilon, \quad 0 = \frac{d}{dz} \left(C_\varepsilon \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dz} \right) - C_{\varepsilon 2} \left(\frac{\varepsilon}{k} \right) \varepsilon \quad (10)$$

となる。ここで、 z は格子の振動中心から鉛直上向きに取られた座標がある。前の二つの場合と同様仮想原点 z_x を用いて k と ε の分布を

$$k=A(z-z_x)^{-\alpha}, \quad \varepsilon=B(z-z_x)^{-\beta} \quad (11)$$

で表すと(10)式より α 、 β 、 C_k 、 C_ε の関係として

$$3\alpha - 2\beta + 2 = 0, \quad \frac{C_k C_{\varepsilon 2}}{C_\varepsilon} = \beta(\beta + 1)$$

を得る。振動格子乱流の詳細な測定から $\alpha=2$ であることが明らかとなった¹⁾。また、エネルギー・フラックスを $1/2(2u'^2 w' + w'^3)$ から算定し、 $z=1.0$ におけるエネルギー・フラックスを $k^2/\varepsilon \cdot (dk/dz)$ の値をプロットすることにより、 $C_k=0.23$ であることがわかった²⁾。その関係を示したのが図-3である。これらの実験結果から $C_\varepsilon=0.138$ が導かれる。

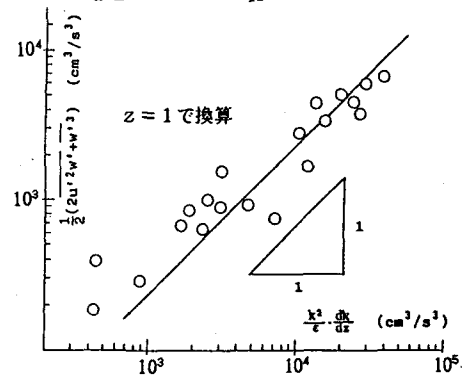


図-3 エネルギー・フラックスと $k^2/\varepsilon \cdot dk/dz$ との関係

3. むすび

3種類の簡単な場に k - ε モデルを適用し、信頼のおける実験結果を導入することにより普遍定数を次のように求めることができた。

$$C_k=0.23, \quad C_\varepsilon=0.138, \quad C_{\varepsilon 2}=2.0$$

今後、これらの値を用いて実際の乱流現象をシミュレートする予定である。

参考文献

- 1) 小松、松永、仲敷、細山田： k - ε 乱流モデルの問題点とその改良、第30回水理講演会論文集
- 2) 細山田、小松、河野、粟谷：乱れエネルギーの拡散と散逸について、昭和61年度西部支部発表会