塩水くさび拡散問題への重み付差分法の応用

九州産業大学　正員○加納正道、　東 和 大学　正員　空閑幸雄
九州産業大学　正員　赤坂順三、　九州産業大学　正員　細川土佐男

1．まえがき　我々は文献[1],[2]において、不圧及び被圧滞水層内における塩水くさび侵入問題解析のための、浸透流方程式や移流拡散方程式の重み付差分法の定め方について述べた。また、一次元及び二次元移流拡散方程式の重み付差分法の精度についても、乱流領域（無次元流速(F)や無次元拡散係数(μ)のかなり大きい（$F=\mu=0.01\sim1.0$）の範囲）について、精度検証を行ってきた。しかし、実際の流れの場においては、流速や拡散係数は場所で異なるのが普通であるので、これの一応用として鉛直二次元断面内の被圧滞水層における塩水くさび侵入問題を取り上げることにした。そこで本報では、図1に示す被圧滞水層内における塩水くさび拡散問題例では無次元流速(F)や無次元拡散係数(μ)がかなり小さいので、この F 、μの小さい範囲における移流拡散方程式の重み付差分法の定め方と精度検証の結果の一部を示す。

2．基礎方程式　被圧滞水層内の塩水くさびの浸透と拡散問題は定常浸透流方程式(1)および非定常移流拡散方程式(2)に支配される。

浸透流方程式　：
$$D_1\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+D_2\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial y}\left(D_2\frac{\rho}{\rho_f}\right)=0 \tag{1}$$

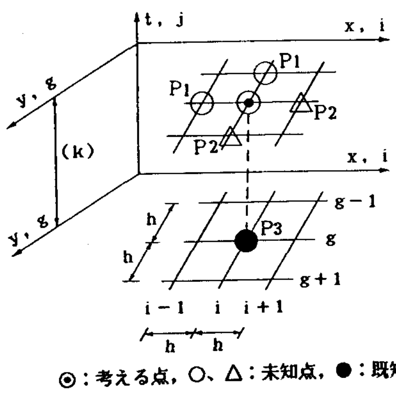
移流拡散方程式：
$$\frac{\partial c}{\partial t}=d_1\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}+d_2\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}-u_1\frac{\partial c}{\partial x}-u_2\frac{\partial c}{\partial y} \tag{2}$$

ここにu_1, u_2：x, y方向の実流速、D_1, D_2：透水係数、H：圧力水頭、ρ_f：淡水の密度、ρ：流体の密度、ρ_s：塩水の密度、c：塩分濃度、d_1, d_2：x, y方向の拡散係数である。なお、密度ρと濃度cとの関係は、次式(3)で表わす。
$$\rho=\rho_f+(\rho_s-\rho_f)\cdot c \tag{3}$$

3．重み付差分法　浸透流方程式の重み付差分法の定め方については、文献[1]に述べている方法による。また、図1の解析領域と境界条件における移流拡散方程式(2)の重み付差分法を求めるには浸透流方程式(1)より求めた流速や拡散係数はかなり小さいので、文献[1]に述べた二次元移流拡散差分モデル（図2）で解析を行う。つぎに、移流拡散方程式(2)を満足するx, y, tの増分を$\Delta x=\Delta y=h, \Delta t=k$として、$x=p_1h, y=p_2h, t=qk$のように離散化をほどこす。図2に示すように、3種類5点の近接点で差分モデルを考える場合には、差分式は式(5)のように示される。そこで、原点をP_3の 点に移し無次元化した二次元流速と二次元拡散係数を $F_*=F_x+F_y$, $\mu_*=\mu_x+\mu_y$ とすると、式(4)で r=0,1,2 とおいて得られるcの値を式(5)に代入すれば、重み p_1, p_2, p_3 の係数を決定する連立方程式(6)が求まる。式(6)を解けば、p_1, p_2, p_3が得られ、二次元移流拡散方程式

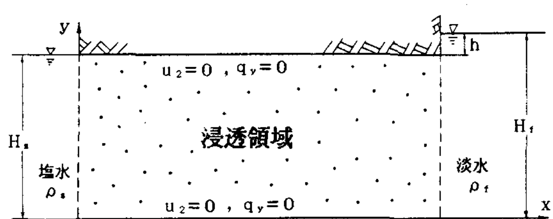
$$c^{(r)}(x,y,t)=\sum_{i=0}^{r/2}\left[\frac{\{(x-u_1t)+(y-u_2t)\}^{r-2i}}{(r-2i)!}\cdot\frac{\{(d_1+d_2)t\}^{i}}{i!}\right] \tag{4}$$

$$\begin{aligned}c(i,g,j+1)=&P1\{c(i-1,g,j+1)+c(i,g-1,j+1)\}\\&+P2\{c(i,g+1,j+1)+c(i+1,g,j+1)\}\\&+P3\cdot c(i,g,j)\end{aligned} \tag{5}$$



◎：考える点，○、△：未知点，●：既知点

図2　二次元移流拡散差分モデル



$[q_y=-u_2+d_2\cdot\partial c/\partial y]$

図1　解析領域と境界条件

の重み付差分式(5)が定まる。次に、透水層、不透水層の境界上での解析条件を考えれば二次元移流拡散方程式(2)は境界条件(q_y=0)より、x方向のみの一次元移流拡散方程式(7)となる。これより以下に一次元移流拡散方程式の重み付差分法の定め方について簡単に述べる。まず、式(7)を満足する多項式(8)が得られる。いまQ_3の点に原点を移し、前述の二次元の場合同様離散化をほどこし、図3に示す3種類3点における差分モデルを考えると、式(9)のように表わされる。さらに式(8)において、r = 0,1,2 として求めた$c^{(r)}$の値を差分式(9)に代入して連立方程式(10)を求めこれを解いてQ_1,Q_2,Q_3の重みを定める。ここに、F_X とμ_X はx方向の無次元化した流速と拡散係数を表わす。

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2(-1-F_*) & 2(1-F_*) & 0 \\ (1+F_*)^2+2\mu_* & (1-F_*)^2+2\mu_* & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P1 \\ P2 \\ P3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -F_* \\ 1/2F_*^2+\mu_* \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = d_1 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - u_1 \frac{\partial c}{\partial x} \quad (7)$$

$$c^{(r)}(x,t) = \sum_{i=0}^{r/2} \left[\frac{(x-u_1 t)^{r-2i}}{(r-2i)!} \cdot \frac{(d_1 t)^i}{i!} \right] \quad (8)$$

$$c(i,j+1) = Q1 \cdot c(i-1,j+1) + Q2 \cdot c(i+1,j+1) + Q3 \cdot c(i,j) \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ (-1-F_X) & (1-F_X) & 0 \\ (1+F_X)^2+2\mu_X & (1-F_X)^2+2\mu_X & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q1 \\ Q2 \\ Q3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -F_X \\ F_X^2+2\mu_X \end{bmatrix} \quad (10)$$

4．移流拡散方程式の重み付差分法の精度

ここでは、図2,3の差分モデルを用いた二次元移流拡散方程式の重み付差分法を流速や拡散係数の小さい領域において、理論式と比較して精度を検討した。まず、二次元移流拡散方程式の重み付差分式(5)の精度の評価は、理論式(11)との絶対誤差が$O(\Delta X)^4$ 以下となるF_*, μ_*の範囲を図4の斜線部分に示している。また、一次元移流拡散方程式の重み付差分式(9)の精度の評価も、二次元同様理論式(12)との絶対誤差が $O(\Delta X)^4$ 以下の F_x, μ_xの範囲を図5の斜線部分に示している。

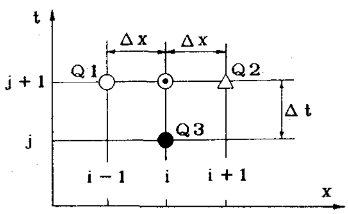


図3　一次元移流拡散差分モデル

$$c(x,y,t) = \frac{M}{4\pi\rho t\sqrt{d_1 d_2}} \cdot \mathrm{EXP}\left[-\frac{1}{4t}\left\{\frac{(x-u_1 t)^2}{d_1} + \frac{(y-u_2 t)^2}{d_2}\right\}\right] \quad (11)$$

$$c(x,t) = \frac{M}{2\rho\sqrt{\pi d_1 t}} \mathrm{EXP}\left[-\frac{(x-u_1 t)^2}{4 d_1 t}\right] \quad (12)$$

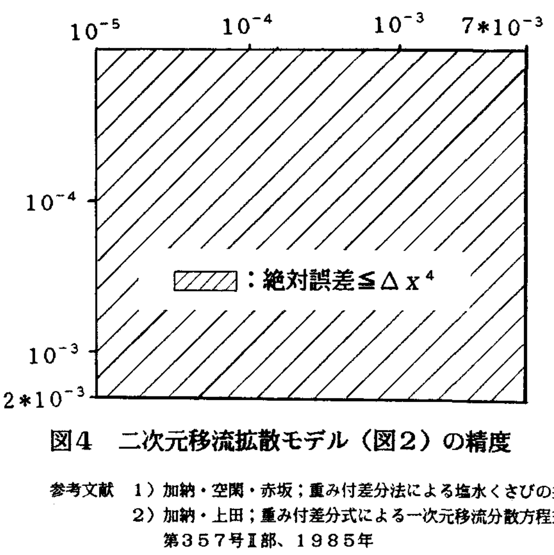


図4　二次元移流拡散モデル（図2）の精度

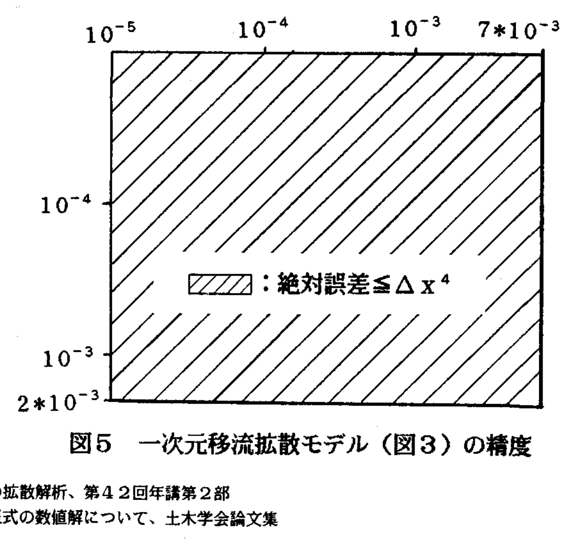


図5　一次元移流拡散モデル（図3）の精度

参考文献　1）加納・空閑・赤坂；重み付差分法による塩水くさびの拡散解析、第42回年講第2部
2）加納・上田；重み付差分式による一次元移流分散方程式の数値解について、土木学会論文集第357号Ⅱ部、1985年