

カルマン・フィルターによる構造物の動的特性推定

長崎大学工学部 学生員 ○田中 敏也

長崎大学工学部 正 員 岡林 隆敏

1. はじめに

道路橋の振動特性の変化からその損傷程度を推定し何らかの対策を行うことは、橋梁の維持・管理において重要である。著者らは、衝撃加振法を提案し実橋梁での実験を行ってきたが、測定結果にはレベルの高い雑音が付随してくる。そこで拡張カルマン・フィルターの理論を採用し、精度の高い動的特性推定を行うことを試みた。この理論は状態量とパラメータを拡張した状態変数と考えカルマン・フィルターを駆動させるものである。また数値解析に新しくPade近似を採用し、既往の研究にはない推定精度を得ようとした。この論文では、拡張カルマン・フィルターの概要と、様々な初期条件のもとで推定を行った結果を報告する。

2. 拡張カルマン・フィルターの概要

拡張カルマン・フィルター理論¹⁾²⁾の特徴は、運動方程式を直接アルゴリズム中に組み込むことにより、運動方程式に含まれるパラメータを直接推定できることにある。非線形連続方程式と非線形離散方程式を、

$$dX/dt = f(X, t) \cdots (1) \quad \text{リズムは、}$$

$$Y_k = h(X_{t_k}, t_k) \cdots (2)$$

とする。ここに、 X, t : システムの状態変数、 Y_k : 観測ベクトル、 v_k : ガウス白色雑音、 $E(v_k v_k^T) = R(k) \delta_{k,l}$ 、 $\delta_{k,l}$: クロネッカーのデルタ、 E : 期待値である。そこで、拡張カルマン・フィルターのアルゴ

$$P(t_{k+1}|t_k) = \Phi(t_{k+1}, t_k; \hat{x}(t_k|t_k)) P(t_k|t_k) \Phi^T(t_{k+1}, t_k; \hat{x}(t_k|t_k)) \cdots (3)$$

$$K(t_{k+1}; \hat{x}(t_{k+1}|t_k)) = P(t_{k+1}|t_k) M^T(t_{k+1}; \hat{x}(t_{k+1}|t_k)) [M(t_{k+1}; \hat{x}(t_{k+1}|t_k)) \times P(t_{k+1}|t_k) M^T(t_{k+1}; \hat{x}(t_{k+1}|t_k)) + R(k+1)]^{-1} \cdots (4)$$

$$P(t_{k+1}|t_{k+1}) = [I - K(t_{k+1}; \hat{x}(t_{k+1}|t_k)) M(t_{k+1}; \hat{x}(t_{k+1}|t_k))] \times P(t_{k+1}|t_k) [I - K(t_{k+1}; \hat{x}(t_{k+1}|t_k)) M(t_{k+1}; \hat{x}(t_{k+1}|t_k))]^T + K(t_{k+1}; \hat{x}(t_{k+1}|t_k)) R(k+1) K^T(t_{k+1}; \hat{x}(t_{k+1}|t_k)) \cdots (5)$$

$$\hat{X}(t_{k+1}|t_k) = \hat{X}(t_k|t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(\hat{X}(t|t_k), t) dt \cdots (6)$$

$$\hat{X}(t_{k+1}|t_{k+1}) = \hat{X}(t_{k+1}|t_k) + K(t_{k+1}; \hat{x}(t_{k+1}|t_k)) [Y_{k+1} - h(\hat{X}(t_{k+1}|t_k), t_{k+1})] \cdots (7)$$

となる。ここに、 $\hat{X}(t_{k+1}|t_k)$: Y_k が与えられたときの t_{k+1} 時間における状態推定ベクトル(最適推定値) ($n \times 1$)、 $P(t_{k+1}|t_k)$: $\hat{X}(t_{k+1}|t_k)$ と真値 $X(t_{k+1})$ との差の共分散行列 ($n \times n$)、 Φ : (1)式の遷移行列であり、初期値 $\hat{X}(t_0|t_0)$ 、 $P(t_0|t_0)$ を与えることによって漸的に最適推定値を求めることができる。

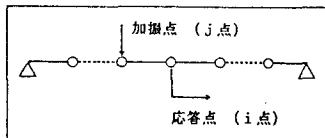


図-1 多自由度系のモデル

3. 多自由度系のモデル化

線形多自由度系の運動方程式は、次式で与えられる。

$$M \ddot{Z} + C \dot{Z} + K Z = G(t) \cdots (8)$$

ここに、 M : 質量行列、 C : 減衰行列、 K : 剛性行列、 $G(t)$: 外力行列である。 K 次モードを ϕ_k 、 k 次の振動数を ω_k 、減衰定数を ρ_k とすると、 k 次の運動方程式は、

$$q_k + 2\rho_k \omega_k \dot{q}_k + \omega_k^2 q_k = \beta_{jk} g(t) \cdots (9)$$

となる。ここに、 $\beta_{jk} = \phi_{jk}/m_k$ 、 j 点: 加振点、 m_k は

有効質量である。このとき i 点における応答は、

$$Z = \sum_{k=1}^n \phi_{ik} q_k \cdots (10)$$

で表される。ここに応答とモーダルパラメータを状態空間表示すると、

$$X = [\cdots q_k \quad \dot{q}_k \quad \omega_k \quad \rho_k \quad \beta_k \cdots] \cdots (11)$$

となり、 X のサイズは ($n \times 5$)となる。ここで、 $\omega_k, \rho_k, \beta_k$ を変数として状態ベクトルに組み込

んだことにより (1)式は非線形方程式となる。本論文では、これを数値解析する方法として、Pade近似

$$(I - F\Delta/2 + (F\Delta)^2/12) X_{t_{k+1}} = (I + F\Delta/2 + (F\Delta)^2/12) X_{t_k} + (U_{t_{k+1}} + U_{t_k}) F/2 + F(U_{t_k} - U_{t_{k+1}}) \Delta^2/12 \cdots (12)$$

(Δ : 時間刻み、 U_{t_k} : 外力ベクトル)を適用し、高次項まで誤差を考慮した。したがって (3)式の遷移行列は、

$$\Phi(t_{k+1}, t_k; \hat{x}(t_k|t_k)) = (I - F\Delta/2 + (F\Delta)^2/12)^{-1} (I + F\Delta/2 + (F\Delta)^2/12) \cdots (13)$$

$$F(t_k; \hat{X}(t_k|t_k)) = \left[\frac{\partial f_i(X, t)}{\partial x_j} \right]_{X=\hat{X}(t_k|t_k)} \cdots (14)$$

で表される。また (4), (5) 式の変換行列は、

$$M[t_k; \hat{X}(t_k | t_k)] = \left[\frac{\partial h_i(X_{t_k}, t_k)}{\partial x_j} \right]_{x_{t_k} = \hat{X}(t_k | t_k)} \dots \dots \dots (15)$$

となる。多自由度系のモデルを[図-1]に示した。

4. 数値計算の結果と考察

1 自由度系の観測波形は、

Pade近似 (固有振動数 1(Hz)、

減衰定数 0.1、外力は加振時

間 0.05 sec の半正弦波[図-

2 (a)]で得られた波形に白色

雑音を付して用いた([図-2 (b)])

SN比 10%)。時刻間 0.01 sec

として SN 比を変えて推定を行っ

た結果を[表-1]に、推定過程を

[図-3](SN比 10%、 $X(t_0 | t_0)$;

真値の 70%)に示した。これより SN 比が大きくなると推定値の精度が

落ちることがわかる。また、初期値 $X(t_0 | t_0)$ 、 $P(t_0 | t_0)$ をそれぞれ

変えて推定した結果より、減衰定数は固有振動数に比べて初期値

の影響を受けやすく、推定過程において敏感に反応する。また固有

振動数の初期値を真値の 80%に固定し、減衰定数の初期値を変

えて推定した結果からは、減衰定数の初期値として 0.4~0.005

(真値 0.1)を入力してもそれぞれのパラメータの推定誤差は 1%

以内に収束した。3 自由度系の観測波形[図-2 (c)](SN比 10%)

は、3 自由度の応答波形に観測雑音を付加して合成したものである。

各パラメータの真値は[表-2]に示している。SN 比の変

化による推定結果を[表-2]に、推定過程を[図-4](SN比 10%、

$X(t_0 | t_0)$:真値の 90%)に示した。推定結果より減衰定数はすべ

ての初期条件において敏感であり、このような算法では推定誤差

を 10%以内に収束させるのは難しいことが分かった。

5. おわりに

1 自由度系では、様々な初期条件のもとで容易に推定誤差を 1

%以内に収束できる。3 自由度系では、減衰定数の推定精度が落

ち、推定過程でかなり敏感に反応する。この原因の 1つとして、

減衰定数の値が他のパラメ

ータの値に比べて小さい

ことが考えられる。この対

策として、3 自由度系にお

けるパラメータの推定値

の精度を高め、測定過程に

おける減衰定数の反応を押

さえることが必要である。このような結果については講演当日に報告する予定である。

【参考文献】 1) Jazwinski, A.H. : Stochastic processes and filtering theory, Academic press, 1970

2) 星谷・斎藤 : 拡張カルマン・フィルタを用いた振動系の同定, 土木学会論文報告集, 1983.11

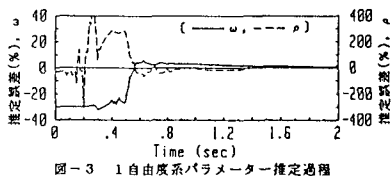
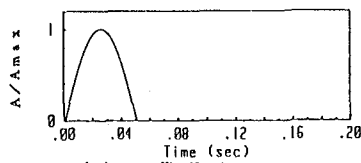


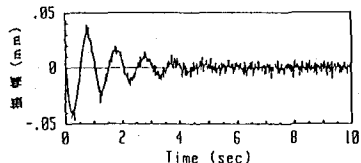
図-3 1 自由度系パラメータ推定過程

表-1 1 自由度系パラメータ推定結果

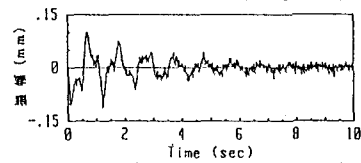
パラメータ		固有数 ω (Hz)	減衰定数 ρ
真値		1.00000	0.10000
S	0	1.00608	0.10165
N	10	1.01032	0.09810
比	20	1.01578	0.10154
(%)	30	1.02176	0.10522



(a) 1 自由度系の観測波形

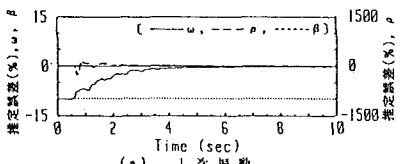


(b) 1 自由度系の応答 (SN 比 10%)

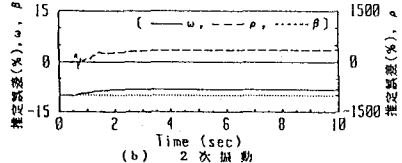


(c) 3 自由度系の応答 (SN 比 10%)

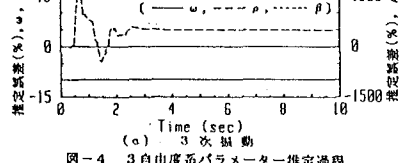
図-2 外力と応答波形



(a) 1 次振動



(b) 2 次振動



(c) 3 次振動

図-4 3 自由度系パラメータ推定過程

表-2 3 自由度系パラメータ推定結果

		1 次 振 動			2 次 振 動			3 次 振 動		
パラメーター		振動数 (Hz)	減衰定数	刺激係数	振動数 (Hz)	減衰定数	刺激係数	振動数 (Hz)	減衰定数	刺激係数
真 値		1.000	0.050	1.579	2.657	0.030	2.904	4.368	0.010	1.578
S N 比 (%)	0	0.944	0.032	3.558	2.654	0.028	4.742	4.368	0.008	3.521
	5	0.994	0.053	1.428	2.546	0.100	2.619	3.949	0.060	1.428
	10	0.989	0.057	1.425	2.438	0.131	2.616	3.938	0.066	1.425
	15	0.993	0.063	1.424	2.417	0.142	2.614	3.935	0.053	1.424
	20	0.980	0.079	1.423	2.407	0.132	2.614	3.933	0.048	1.424