

面内変動せん断力を受ける長方形板の動的安定性

長崎大学工学部 学生員○川副洋一

長崎大学工学部 正 員 高橋和雄

1. まえがき プレートガーター橋の腹板に面内変動曲げが作用すると、係数励振によって面外振動が発生する。著者らは、腹板を一枚の長方形板にモデル化して、面外不安定領域¹⁾および安定を失った後の応答²⁾を明らかにしている。橋梁の支点およびラーメン構造の隅角部には、曲げの他にせん断力も作用している。このために、腹板の面外振動を解明するうえで、面内変動せん断力を受ける長方形板の動的安定性を明らかにしておくことが必要である。ここで、本研究では、面内変動せん断力が作用する場合の長方形板の固有振動特性および動的安定性を明らかにするものである。

2. 解法 図-1に示すような長方形板の周辺に、面内方向に、静的せん断力 N_{xy0} と変動せん断力 $N_{xyt} \cos \Omega t$ の和からなるせん断力 N_{xy} が作用する。図-1のような座標系の上における長方形板の面外振動の運動方程式は次のよう

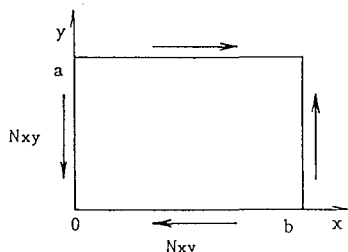


図-1 長方形板の一般図

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \nabla^4 w - 2(N_{xy0} + N_{xyt} \cos \Omega t) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \quad (1)$$

ここに、 ρ ：板の密度、 h ：板厚、 w ：たわみ、 t ：時間、 $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ ：板剛度、 ν ：

ポアソン比、 N_{xyt} ：変動せん断力の振幅、 Ω ：励振円振動数。

境界条件として、次の2ケースを考える。すなわち case I：単純支持($x=0, a$)、固定($y=0, b$)、

case II：単純支持($x=0, a$)、固定($y=0, b$)。

式(1)の解を次のように仮定する。

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{mn}(t) W_{mn}(x, y) \quad (2)$$

ここに、 T_{mn} ：未知の時間関数、 W_{mn} ：境界条件を満足する座標関数。

式(2)の座標関数として、静的せん断力が作用しない長方形板の自由振動の基準関数を用いる。すなわち、

$$\text{case I: } W_{mn} = \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad \text{case II: } W_{mn} = \sin \frac{m\pi x}{a} \sum_{i=1}^n a_i^n \left\{ \cos \frac{(i-1)\pi y}{b} - \cos \frac{(i+1)\pi y}{b} \right\} \quad (3)$$

式(2)を式(1)に代入して、Galerkin法を適用すれば、次のような時間に関する運動方程式が得られる。

$$[I]\{\ddot{T}\} + [A]\{T\} + (\bar{N}_{xy0} + \bar{N}_{xyt} \cos \bar{\omega} t)[B]\{T\} = \{0\} \quad (4)$$

ここに、 $[I]$ ：単位行列、 $[A]$ ：対角行列、 $[B]$ ：係数励振行列、 $\{T\} = \{T_{11} T_{12} T_{13} \cdots\}^T$
 $\bar{N}_{xy0} = N_{xy0}/N_{cr}$ 、 $\bar{N}_{xyt} = N_{xyt}/N_{cr}$ 、 $N_{cr} = \lambda_{cr} D \pi^2 / b^2$ ：座屈せん断力、 λ_{cr} ：座屈固有値、

$\bar{\omega} = \Omega / \omega_{11}$ ：無次元加振円振動数、 $\omega_{11} = k_{11}^2 \sqrt{D / \rho h b^4}$ ：最低次の固有円振動数、

k_{rs} ：振動の固有値。また、板の形状を表すパラメーターとして、 $\beta = a/b$ （縦横比）を定義する。

式(4)の一般解を次のように仮定する。

$$\{T\} = e^{\lambda t} \left\{ \frac{1}{2} b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin k \bar{\omega} t + b_k \cos k \bar{\omega} t) \right\} \quad (5)$$

ここに、 b_0 、 a_k 、 b_k ：未知のベクトル、 λ ：未定定数

式(5)を式(4)に代入して、調和バランス法を適用すれば、未定定数を定めるための代数方程式が得られ、これを行列の固有値問題に変換することによって安定性を判定することができる。これより、安定性を

支配する $\bar{N}_{xyt}$ と $\bar{\omega}$ のパラメータのもとに、不安定領域が得られる。

3、数値結果 (1)固有振動特性

図-2、3は case I、II の正方形板 ($\beta=1.0$) に対して、静的せん断力 $\bar{N}_{xy0}$ と無次元固有振動数 $\bar{n}=\omega_{mn}/\omega_{11}$ との関係をプロットしたものである。また、図-4 は、case I の正方形板 ($\beta=1.0$) の固有振動形 ($\bar{N}_{xy0}=0.0$) と座屈波形 ($\bar{N}_{xy0}=1.0$) を示している。図-4 のように、せん断を受ける平板の面外変形は x, y 軸に対して、対称もしくは逆対称にならない。このために、せん断力を受ける場合の振動形は、 x 方向と y 方向の半波数の意味が明確でなくなってくる。

図-2、3に示すように、最低次の固有振動曲線が、 $\bar{N}_{xy0}=1.0$ のとき、 $\bar{\omega}=0.0$ となって座屈を生ずることになる。この他の固有振動曲線は、一般にせん断力の増加に伴って減少するが、一様圧縮力の場合には見受けられない増大する固有振動曲線も存在する。このように、固有振動の振動形は、 x 方向と y 方向の半波数の動形と座屈波形がかなり異なるために、不安定領域は、複数の固有振動形が含まれる結合共振が支配的であることが予想される。

(2)不安定領域 図-5は、case I の長方形板 ($\beta=1.5$) の面外不安定領域である。図中の横軸 $\bar{\omega}$ が加振振動数を、縦軸 $\bar{N}_{xyt}$ は変動せん断力の振幅である。図中の斜線部が不安定領域を意味し、 $\omega_{ij}+\omega_{kl}$ は和形の結合共振の組合せを示す。変動せん断力を受ける長方形板の不安定領域には単純共振が含まれないことがわかる。

4.まとめ せん断力を受ける長方形板 の座屈特性、固有振動特性および面外不安定領域に及ぼす静的曲げおよび境界条件の影響は論演時に発表する。

参考文献 1)高橋・池田・松川:土木学会論文集,第341号,pp.179-186,1984,2)
Takahashi,K.,Konishi,Y.,Ikeda,T.
and Kawano,R.:Proc. of JSCE,No.
374/I-6,pp.79-87,1986.

(i,j);i,j:x,y方向の半波数($\bar{N}_{xy0}=0.0$)

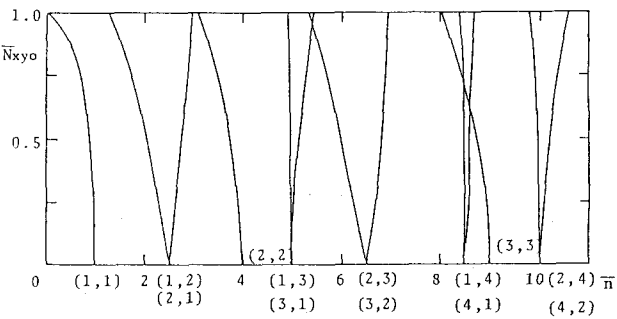


図-2 無次元固有振動数 $\bar{n}$ と静的せん断力

$\bar{N}_{xy0}$ との関係(case I、 $\beta=1.0$)

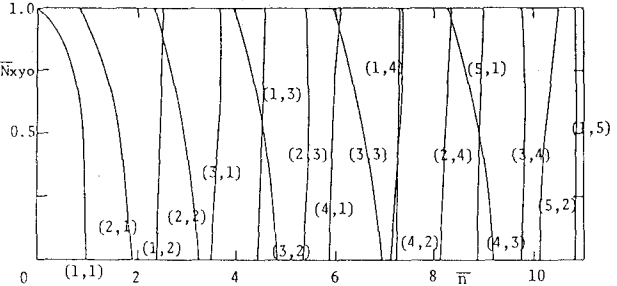
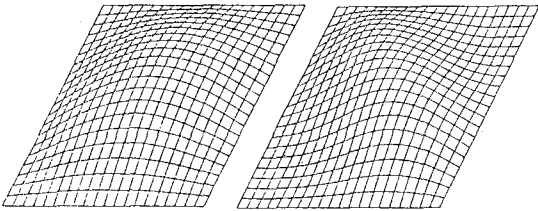


図-3 無次元固有振動数 $\bar{n}$ と静的せん断力

$\bar{N}_{xy0}$ との関係(case II、 $\beta=1.0$)



(a) $\bar{N}_{xy0}=0.0$

(b) $\bar{N}_{xy0}=1.0$

図-4 正方形板の固有振動形および座屈(case I)

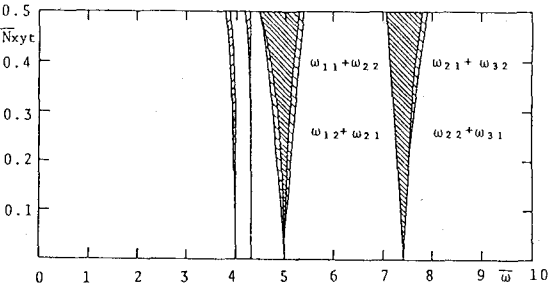


図-5 長方形板の不安定領域(case I、 $\beta=1.5$)