

面内曲げを受ける曲線はりの動的安定性

長崎大学工学部 学生員 ○太田昭夫

長崎大学工学部 正 員 高橋和雄

1. まえがき 曲線はりに面内変動曲げが作用すると、特定の振動数領域で面内の曲げおよびねじり振動が生ずることが知られている。この現象は、係数励振振動に起因するものである。はりに一様分布面内力が作用する場合については、文献1)、2)で明らかにされているが、面内曲げが作用する場合については、Ali³⁾によって、面外の自由度を1とした解析が行われ、単純支持のみの解が求められている。曲線はりは、無限の自由度をもつために、多自由度系としての取扱いが必要である。そこで、本研究では、多自由度系として、面内変動曲げを受ける曲線はりの動的安定性を解析する。

2. 解法 図-1に示すような曲線はりの両端に、静的曲げモーメント M_0 と変動曲げモーメント $M_1 \cos \Omega t$ の和からなる曲げモーメント M が作用するものとする。はりに図のような座標系 (x, y, z) を導入する。ただし、 y 軸は面外方向とする。このときの曲線はりの面外振動の運動方程式は次のように与えられる¹⁾²⁾。

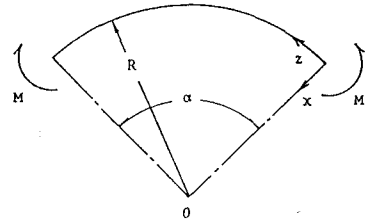


図-1 曲線はりの一般図

$$L_1(v, \theta) = EI_y \left(\frac{\partial^4 v}{\partial z^4} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) + EI_y \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - GJ \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + (M_0 + M_1 \cos \Omega t) \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \frac{wA}{g} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

$$L_2(v, \theta) = EI_y \left(\frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) - EI_y \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) - GJ \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + (M_0 + M_1 \cos \Omega t) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) + \frac{wI_p}{g} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

ここに、 v :面外変位、 θ :ねじれ角、 $A, I_x, I_y, I_w, I_p, \gamma$:断面定数、 E :ヤング率、 G :せん断弾性係数、 w :単位体積重量、 M_1 :変動曲げモーメントの振幅、 Ω :励振円振動数。

式(1)、(2)を次のような無次元パラメーターを用いて、書き換える。

$$V = v/R, \theta = \theta, L = z/l, C_w = EI_w/EI_y R^2, C_J = GJ/EI_y, C_\gamma = \gamma^2/R^2, \tau = \omega_1 t, \bar{M}_0 = M_0/M_{cr}, \bar{M}_1 = M_1/M_{cr}, \bar{\omega} = \Omega/\omega_1$$

ここに、 $\lambda_{cr} = M_{cr} R/EI_y$:面外座屈固有値、 $\lambda_{\omega_1} = \omega_1 \sqrt{wAR^4/EI_y g}$:面外

1次振動の固有値。

曲線はりの境界条件として、次の2ケースを考える。

case I:両端単純支持、case II:両端固定

式(1)、(2)の一般解を次のように仮定する。すなわち、

$$V = \sum T_i(\tau) G_i(L), \theta = \sum T_i(\tau) H_i(L) \quad (3)$$

ここに、 T_i :未知の時間関数、 G_i, H_i :式(1)、(2)で $\bar{M}_1=0$ とおいて得られる曲線はりの i 次の固有振動形。

式(1)、(2)にGalerkin法を適用する。すなわち、

$$\int_0^1 (L_1 V_n + L_2 \theta_n) dL = 0 \quad (4)$$

ここに、 $n=1, 2, \dots$ 。

これより、次のような時間関数に関する運動方程式が得られる。

$$(\ddot{T}) + [E]\{T\} + (\bar{M}_0 + \bar{M}_1 \cos \bar{\omega} \tau)[F]\{T\} = 0 \quad (5)$$

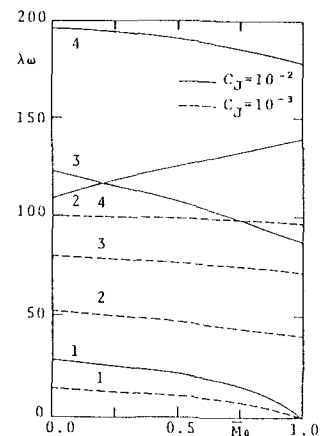


図-2 振動の固有値 λ_ω と静的曲げ $\bar{M}_0$ との関係(case II, $C_w = 0.0, C_\gamma = 10^{-4}, \alpha = \pi/4$)

ここに、 $\{T\} = (T_1 \ T_2 \ \dots)^T$ 、 $[E]$:対角行列、 $[F]$:係数励振行列。

式(5)の安定性解析は、行列の固有値問題に変換する手法を用いて行う⁴⁾。

3. 数値結果 (1)固有振動解析

図-2は、case II の中心角 $\alpha = \pi/4$ 、 $C_\omega = 0$ 、 $C_r = 10^{-4}$ の円弧はりの対称4次までの固有値と静的曲げ $\bar{M}_0$ との関係を $C_J = 10^{-2}$ と 10^{-3} に対して示したものである。図のように、静的曲げ $\bar{M}_0$ の効果は、1次の固有値に対して著しく、 $\bar{M}_0 = 1.0$ で $\lambda_{\omega_1} = 0.0$ になる。図のように静的曲げの効果は振動次数によって異なり、 $\bar{M}_0$ の増加とともに増大するケースも含まれる。

(2)不安定領域 式(5)の行列の要素を調べたところ、case I では、単純共振のみが存在し、case II では、単純共振と和形の結合共振が存在することが判明した。図-3, 4, 5に $C_\omega = 0.0$ 、 $C_J = 10^{-3}$ 、 $C_r = 10^{-4}$ 、 $\alpha = \pi/4$ の不安定領域を示す。これらの図において、軸 $\bar{\omega}$ の励振振動数を、縦軸 $\bar{M}_t$ は、座屈モーメントの振幅を示す。斜線部が不安定領域で、 $2\omega_1/k$ ($k=1, 2, \dots$) の記号を付けた右上がりの斜線部が単純共振を示す。 $k=1$ の場合が主不安定領域で、 $k=2$ の場合が副不安定領域である。また、 $\omega_1 + \omega_3$ の記号を付けた右下がりの斜線部が結合共振の主不安定領域である。図中の不安定領域は $\bar{M}_t = 0.5$ において、 $\bar{\omega} = 0.1$ 以上の場合をプロットしたもので、これより狭い不安定領域は無視されている。図-3に示すように、case I では、1次振動と2次振動の固有振動数に差があるので、1次振動の不安定領域のみが含まれる。図-4のcase II の場合には、単純共振の他に結合共振が含まれるが、その幅は単純共振よりも狭い。一般に、円弧はりでは、単純共振の不安定領域が広い。図-5は、静的曲げ $\bar{M}_0 = 0.5$ が作用する場合に相当する。図4と5の比較より、静的曲げの存在は、不安定領域を広くする効果がある。

4. まとめ 本研究によって、面内変動曲げを受ける円弧はりの動的安定性の基本的な特性が明確にされた。面外不安定領域に及ぼす断面定数の影響などについては講演時に発表する。

参考文献

- 1) 築地：長崎大学工学部研究報告，第4号，pp.46-54，1973，
- 2) Takahashi, K.: Theoretical and Applied Mechanics, Vol.34, pp.287-295, 1986，
- 3) Ali, S.A.: Journal of Structural Engineering, Vol.109, No.4, pp.829-842, 1983，
- 4) Takahashi, K.: Journal of Sound and Vibration, Vol.85, pp.257-262, 1982.

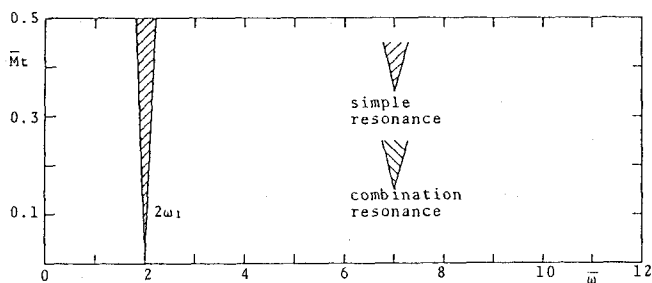


図-3 面外不安定領域

(case I, $C_\omega = 0.0$, $C_J = 10^{-3}$, $C_r = 10^{-4}$, $\alpha = \pi/4$, $\bar{M}_0 = 0.0$)

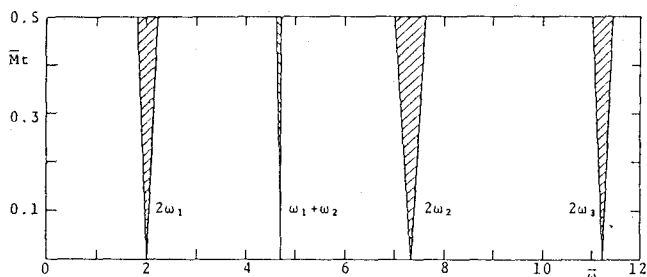


図-4 面外不安定領域

(case II, $C_\omega = 0.0$, $C_J = 10^{-3}$, $C_r = 10^{-4}$, $\alpha = \pi/4$, $\bar{M}_0 = 0.0$)

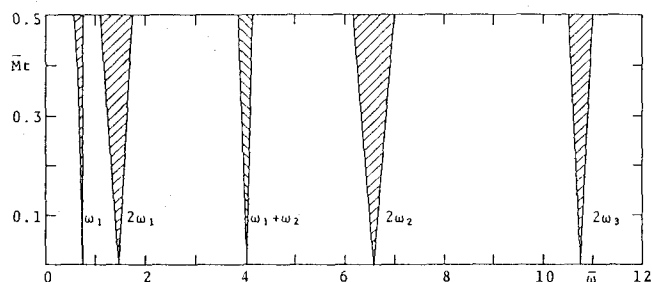


図-5 面外不安定領域

(case II, $C_\omega = 0.0$, $C_J = 10^{-3}$, $C_r = 10^{-4}$, $\alpha = \pi/4$, $\bar{M}_0 = 0.5$)