# 変厚矩形板の非弾性曲げの一解析法

長崎大学　正員　○松田　浩
長崎大学　正員　　崎山　毅

## 1．まえがき

変厚矩形板の非弾性曲げの支配式は、変数係数の微分方程式となり、これを厳密に解くことはほとんど不可能であると考えられる。本文は、変厚矩形板の弾塑性挙動を支配する基礎微分方程式について板の縦横の等分割線の交点における離散解を求め、これに基づく変厚矩形板の非弾性曲げの一解析法を示したものである。数値計算例として等分布荷重が作用する四辺単純支持正方形板の場合を示す。

## 2．増分形基礎微分方程式の離散解

矩形板のせん断力を$Q_y$、$Q_x$、ねじりモーメント$M_{xy}$、曲げモーメントを$M_y$、$M_x$、たわみ角を$\theta_y$、$\theta_x$、たわみをwとすれば、Mindlin理論($\sigma_z$=0)に基づく変厚板を含む一般的な矩形板の弾塑性挙動を支配する基礎微分方程式は、次の増分形式の変数係数の連立偏微分方程式で表わされる。

$$\frac{\partial \Delta Q_x}{\partial x}+\frac{\partial \Delta Q_y}{\partial y}+\Delta q-k_v\Delta w=0 \qquad (1\text{-a})$$

$$\frac{\partial \Delta M_x}{\partial x}+\frac{\partial \Delta M_{xy}}{\partial y}-\Delta Q_x=0 \qquad (1\text{-b})$$

$$\frac{\partial \Delta M_y}{\partial y}+\frac{\partial \Delta M_{xy}}{\partial x}-\Delta Q_y=0 \qquad (1\text{-c})$$

$$\frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial x}=\frac{1}{D}(b_{11}\Delta M_x+b_{12}\Delta M_y+b_{13}\Delta M_{xy}) \qquad (1\text{-d})$$

$$\frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial y}=\frac{1}{D}(b_{21}\Delta M_x+b_{22}\Delta M_y+b_{23}\Delta M_{xy}) \qquad (1\text{-e})$$

$$\frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial y}+\frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial x}=\frac{1}{D}(b_{31}\Delta M_x+b_{32}\Delta M_y+b_{33}\Delta M_{xy}) \qquad (1\text{-f})$$

$$\frac{\partial \Delta w}{\partial x}+\Delta\theta_x=\frac{\Delta Q_x}{\kappa Gh} \qquad (1\text{-g})$$

$$\frac{\partial \Delta w}{\partial y}+\Delta\theta_y=\frac{\Delta Q_y}{\kappa Gh} \qquad (1\text{-h})$$

ここに、q=q(x,y)：横荷重強度、E：弾性係数、$G=E/2(1+\nu)$：せん断弾性係数、$\nu$：ポアソン比、
　h=h(x,y)：板厚、$D=D(x,y)=Eh(x,y)^3/12(1-\nu^2)$：板剛度、$\kappa=5/6$：せん断修正係数、
　$\Delta$：荷重増分$\Delta q$に対する各断面力および変形量の増分、

次の無次元量：

$X_1=a^2Q_y/[D_0(1-\nu^2)]$，$X_2=a^2Q_x/[D_0(1-\nu^2)]$，$X_3=aM_{xy}/[D_0(1-\nu^2)]$，$X_4=aM_y/[D_0(1-\nu^2)]$
$X_5=aM_x/[D_0(1-\nu^2)]$，$X_6=\theta_y$，$X_7=\theta_x$，$X_8=w/a$，$\eta=x/a$，$\zeta=y/b$，a，b：矩形板の横縦の辺長，$\mu=b/a$，$h_0$：基準板厚，$q=\mu q_0 a^3/[D_0(1-\nu^2)][q(x,y)/q_0]$，$q_0$：基準荷重強度，
$K=Eh_0^3/(12\kappa Gh)$，$I=I(x,y)=\mu(1-\nu^2)[h_0/h(x,y)]^3$，$D_0=Eh_0^3/[12(1-\nu^2)]$：基準板剛度，

を用いて無次元化後、任意の離散点(i,j)における離散解$\Delta X_{pij}$(P=1～8)は次式のように整理される。

$$\Delta X_{pij}=\sum_{d=1}^{6}\left(\sum_{k=0}^{i}a_{pijkd}\Delta X_{rk0}+\sum_{\ell=0}^{j}b_{pij\ell d}\Delta X_{s0\ell}\right)+\Delta q_{pij} \qquad (2)$$

式(3)の導入過程および積分定数と境界条件の詳細については文献(1)を参照されたい。

## 3．数値計算手法および数値解析結果

矩形板の材料非線形性を考慮する場合の仮定は次のとおりである。
(1)矩形板は、非硬化性材料から成る。(2)部材断面に降伏域が生じた後もMindlinの理論が成り立つ。
(3)変形は、板厚に比して小さい。したがって、幾何学的非線形性は考慮しない。(4)材料は、von-Misesの降伏条件式に従う。

いま、第n荷重段階で矩形板の断面の一部が弾塑性状態にあるとするなら、基礎微分方程式(1-a)～(1-h)における変数係数$[b_{ij}]$(i=j=3)は、次の計算手順によって求めることができる。なお、本論文においては、断面を多層等分割して解析を行なう。（板厚方向の等分割数：nz=20）

［データ］　第(n-1)荷重段階における無次元応力

$$\frac{\sigma x}{\sigma_0}=\sum^{n-1}\frac{\Delta\sigma x}{\sigma_0},\ \frac{\sigma y}{\sigma_0}=\sum^{n-1}\frac{\Delta\sigma y}{\sigma_0},\ \ \frac{\tau xy}{\sigma_0}=\sum^{n-1}\frac{\Delta\tau xy}{\sigma_0}$$

(a)第(n-1)荷重段階の無次元応力を用いて、すべての離散点における断面のすべての要素について無次元偏差応力$\sigma_x'$, $\sigma_x'$, $\tau_{xy}'$を計算する。

(b)$[b_{ij}]=[a_{ij}]^{-1}$の計算。（これにより剛性の低下が評価される）

(c)$[b_{ij}]$が決定されると、第n荷重段階での増分荷重$\Delta q$に対する増分断面力および増分変形量が求められる。（$\Delta M_x$, $\Delta M_y$, $\Delta M_{xy}$の算定）

(d)第n荷重段階における無次元増分応力の算定。

$\Delta\sigma_x/\sigma_0$, $\Delta\sigma_y/\sigma_0$, $\Delta\tau_{xy}/\sigma_0$

(e)第n荷重段階における無次元応力の算定。

$$\frac{\sigma x}{\sigma_0}=\sum^{n}\frac{\Delta\sigma x}{\sigma_0},\ \frac{\sigma y}{\sigma_0}=\sum^{n}\frac{\Delta\sigma y}{\sigma_0},\ \ \frac{\tau xy}{\sigma_0}=\sum^{n}\frac{\Delta\tau xy}{\sigma_0}$$

以上の(a)～(e)の計算を増分法を用いて繰り返して計算を行なう。

等厚板および変厚板に関して、図1に中央点の荷重変位曲線、図2に$qa^2/M_p=24$のときの断面力および変位図、図3に代表的な荷重段階における塑性域の進行図を示す。最後に数値計算を行って戴いた卒研生森田千尋、山本光生両君に謝意を表します。

参考文献


1) 崎山毅・松田浩：変厚矩形板の曲げの一解析法、土木学会論文報告集、第338号，pp.21-28，1983.

2) 松田浩・崎山毅：矩形板の非弾性曲げの一解析法、構造工学論文集、Vol.33A，pp.257-264，1987.


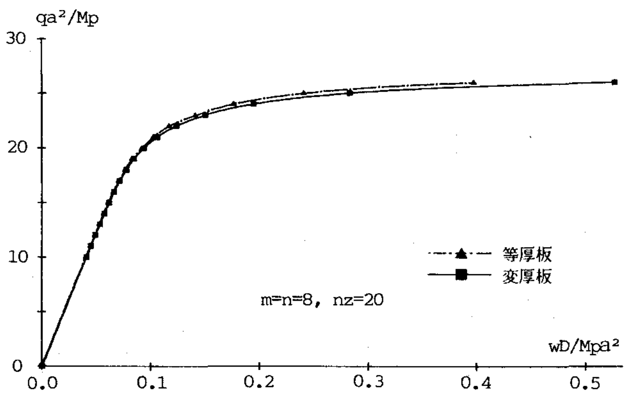


図1 中央点の荷重変位曲線

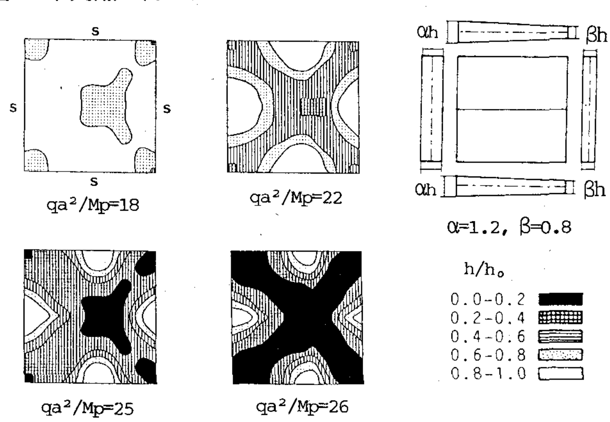


図3 塑性域の進行図

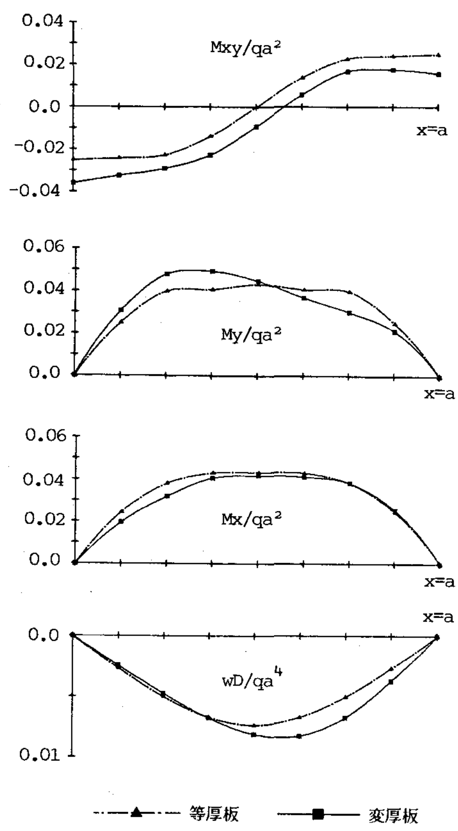


図2 断面力および変位図（$qa^2/M_p=24$）