

有限ひずみ仮想仕事の定理を用いた有限要素解析

熊本大学工学部 学生員 ○島田 陵一
 " 正 員 三池 亮次
 " 正 員 小林 一郎
 " 学生員 米村 広宣

1. はじめに 座屈現象、弾塑性や粘弾性解析のような材料および幾何学的非線形問題において、通常ひずみは微小であるが廻転は有限であるように変形を区分し解析することが多い。しかし、小さい荷重で変形、ひずみが大きく変化する場合には、ひずみも有限の条件を考慮しないと解析の精度や演算の所要時間の点で不利となるであろう。例えば、川原、堀井¹⁾の有限ひずみ有限要素解析のように有限ひずみの場合は、応力としてKirchhoff 応力、ひずみとしてGreen ひずみを用いることが必要となる。

すでに発表の通り²⁾物体に働く外力が仮想変位に対してなす仕事に等価な内部仮想仕事は、もし、その変位がかなり大きい有限変位である場合、Kirchhoff 応力と仮想Green ひずみだけで表すことは不十分で、仮想Green ひずみにあるひずみ補正項を加えた量を仮想ひずみとして用いるべきである。また内部ひずみエネルギーの積分は、変形前(または変形の中間状態)を基準とした状態で行ない、応力の作用する断面積変化率を考慮することが必要である。このような有限ひずみ仮想仕事の定理に従った平面応力有限要素法の基礎式の誘導と適用例を以下に報告する。

2. 有限ひずみ平面応力有限要素法の基礎式の誘導 要素内で応力一定の仮定を設けた i, j, k の節点を持つ三角形有限要素 I を考える。外力が中間状態から増分変位する際になす外部仮想仕事を ΔW とおくと

$$\Delta W = (P_{ijk} + \Delta P_{ijk})^T \Delta d_{ijk} \quad (1)$$

ここに、 P_{ijk} は荷重ベクトル、 ΔP_{ijk} 増分荷重ベクトル、 Δd_{ijk} 増分変位ベクトルである。

また、応力が中間状態から増分変形する際になす内部仮想仕事を $\Delta U'$ とおくと

$$\Delta U' = (\sigma + \Delta \sigma)^T A (\Delta e + \Delta e_t) S' t' \quad (2)$$

ここに、 σ はLagrange流物理的応力ベクトル、 $\Delta \sigma$ はその増分応力ベクトル、 A は応力の作用する断面の断面積の変化率を対角要素にもつマトリックス、 Δe はLagrange流増分弾性ひずみベクトル、 Δe_t は埋め込み座標軸の廻転等にもなう増分付加ひずみベクトル、 S' は中間状態の要素面積、 t' は中間状態の板厚である。

式(1)と式(2)が等しいことより、次に示す有限ひずみ平面応力有限要素法の基礎式が誘導される。

$$\Delta P_{ijk} = K \Delta d_{ijk} + C \quad (3)$$

ここに

$$K = B^T A D B S' t' \quad (4)$$

は剛性マトリックスであり

$$C = \{ (B + B_t)^T A \sigma + B^T D A \Delta e_t \} S' t' - P_{ijk} \quad (5)$$

は定数ベクトルである。式(4)、(5)において、 D は通常の平面応力の応力-ひずみマトリックスで、 B は増分弾性ひずみと増分変位の関係を示すマトリックス、 B_t 増分付加ひずみと増分変位の関係を示すマトリックスである。以上の式は I 要素についてのものであるのが、重ね合わせることによって構造全体の基礎式へと拡大することができる。

なお、変形の中間状態を基準とした変形後のLagrange流物理的応力 E が得られることに次式

$$T = \{ (1 + \Delta V) / (1 + \Delta e_{11} + \Delta e_{22}) \} L^T E L \quad (6)$$

に従って基準座標系真応力 T に変換している。上式で L は座標変換マトリックス、 $\Delta V = \Delta e_{11} + \Delta e_{22} + \Delta e_{33}$ で、 $\Delta e_{ii} (i=1,2,3)$ は軸方向ひずみ成分である。

3. 適用計算例 図1に示すような179節点、320要素の片持ち梁の解析を行なった。有限要素分割においては、全体を長方形要素に分割し、さらに各要素を2本の対角線で4個の三角形に分割する方法を用いた。計算方法としては、荷重を与え、線形変位を求め、その不釣り合い力より補正変位求めて真の平衡状態へ収束させる荷重増分法を用いた。

解析諸量は、部材長 $L=50\text{ cm}$ 、板厚 $t=1\text{ cm}$ 、1ステップの増分荷重とヤング率の比 $\Delta P/E=5 \times 10^{-3}\text{ cm}^2$ 、ポアソン比 $\nu=0.3$ とした。なお、荷重は自由端中央節点Aに載荷した。

図2は節点Aにおける荷重—鉛直変位曲線を示して

おり、線形解及びBisshoppらによる楕円積分解³⁾との比較を行なった。Bisshoppらはこの解析モデルのような深梁についての楕円積分解を求めているが、本解析解はよく一致している。図3は各ステップにおける変形形状を示しており、特に固定端付近での要素のひずみが大きいことがわかる。

次に解析モデルを図4のように10個のブロックに分割し、そのうち4個のブロックについて、ステップ5、10の段階における変形後の部材軸方向の直応力分布、部材軸に垂直な方向のせん断応力分布を求めた。この場合の応力は、長方形要素内の4つの三角形要素の応力の平均値である。図5、6は、それぞれ直応力分布、せん断応力分布を示す。なお、図中の数字は、ブロックの番号を示す。直応力分布は、ステップ5、10ともに、載荷点より十分離れたブロックでは中立軸からの距離に比例しているため、平面保持の法則が成り立っている。また、荷重が増すごとに中立軸が下がる傾向にある。せん断応力分布は、ステップ5におけるブロック4、7ではほぼ理想的な放物線となったが、固定端に近いブロック1では逆向きの放物線となり、自由端に近いブロック10では集中荷重を加えた影響で乱れが生じている。また、荷重が増すごとにせん断応力分布の乱れが大きくなる傾向にある。

現在、弾塑性問題への本法の適用について検討中であるが、講演時に発表の予定である。

参考文献

- 1) 川原、堀井: Large strain elastic-plastic numerical analysis by means of finite element method, JSCE, No. 194, PP. 163-172, 1971.
- 2) 三池 他: 有限ひずみ仮想仕事の定理による有限要素解析, 第42回年次学術講演会概要集, PP. 48-49, 1987.
- 3) Bisshopp et al: Large deflection of cantilever beams, Quarterly of Applied Math. Vol. III, No. 3, PP. 272-276, 1945.

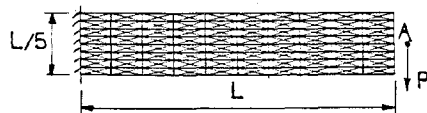


図1 解析モデル

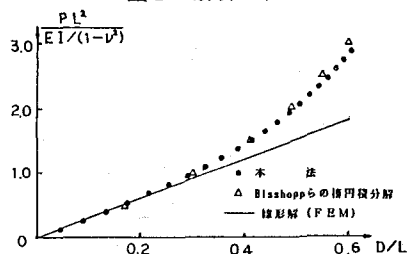


図2 節点Aにおける荷重—鉛直変位曲線

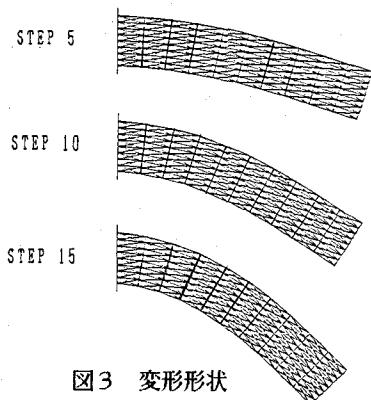


図3 変形形状

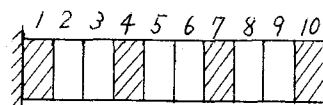


図4 ブロック分割

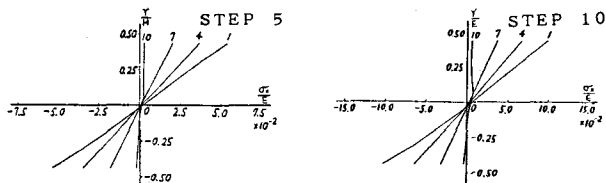


図5 直応力分布図

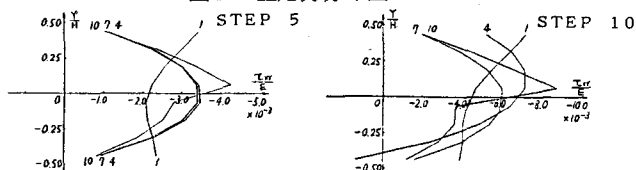


図6 せん断応力分布図