有限要素法による有限変位理論の一定式化

九州大学　正会員 ○ 山口栄輝
A.I.T.　Worsak Kanok-Nukulchai
九州大学　正会員　太田俊昭

1．まえがき

従来の有限変位理論の定式化に関する研究の多くは、全ラグランジ(Total Lagrangian)または更新ラグランジ(Updated Lagrangian)の手法に基づき、それぞれに対応する仮想仕事式により行われてきた[1]。これに対して、本報告では、まず第1種Piola-Kirchhoff応力を用いて定式化を行い、そこで得られた式をもとに、積分変数の変換により、全ラグランジ定式化および更新ラグランジ定式化を試みる。ただし、ここでは静的挙動のみを対象とする。

2．有限変位問題の定式化

第1種P-K応力T_{Ii}を用いると、有限変位解析では次の境界値問題を解くことになる[2]。

$$T_{Ii,I} + \rho_o b_i = 0 \qquad \text{in } B_o \tag{1}$$

$$T_{Ii} n_{oI} + x_i = 0 \qquad \text{on } A_o \tag{2}$$

ここに、ρ_oは密度、b_iは体積力ベクトル、n_{oI}は境界面の単位法線ベクトル、x_iは表面力ベクトルを表す。B_oは解析対象とする領域、A_oはその境界面である。下付き添え字のうち、大文字は物質座標、小文字は空間座標に対応している。また添え字のoは変形前の量であることを示す。 Galerkinの重み付き残差法を式(1)、(2)に適用すると

$$G = \int_{B_o} T_{Ii} w_{i,I} dV - \left(\int_{B_o} \rho_o b_i w_i dV + \int_{A_o} x_i w_i dA \right) = 0 \tag{3}$$

が得られる。有限要素法では、式(3)をもとにした次式を用いて要素ごとの定式化をすることになる。

$$G^e = \int_{B^e_o} T_{Ii} w_{i,I} dV - \left(\int_{B^e_o} \rho_o b_i w_i dV + \int_{A^e_o} x_i w_i dA \right) \tag{4}$$

上付き添え字eは要素の量であることを示す。

ここでは,アイソパラメトリック要素を用いることとし、その節点aに対応する形状関数をN^aとすると、式(4)より次の表現を得る。

$$G^e = \sum_{a=1}^{n} W^a{}_i (K^a{}_i - R^a{}_i) \tag{5}$$

ここに

$$K^a{}_i = \int_{B^e_o} T_{Ii} N^a{}_{,I} dV \tag{6}$$

$$R^a{}_i = \int_{B^e_o} \rho_o b_i N^a dV + \int_{A^e_o} x_i N^a dA \tag{7}$$

n は一要素当たりの節点数である。式(5)を組み合わせることにより、全領域、すなわち式(3)の離散化表示が得られる。

$$G = \{W\}^T (\{K\} - \{R\}) = 0 \tag{8}$$

式(8)において、{W}は任意であるから、離散化釣合い方程式が次のように求められる。

$$\{K\} - \{R\} = \{0\} \tag{9}$$

ところで、第1種P-K応力T_{Ii}と第2種P-K応力S_{IJ}、Cauchy応力σ_{ij}とは次のような関係がある。

$$T_{Ii} = F_{iJ} S_{IJ} \ , \quad T_{Ii} = J\, H_{Ij} \sigma_{ij} \tag{10)、(11}$$

ここに

$$F_{iJ} = \partial x_i / \partial X_J \ , \ J = \det |F_{iJ}| \ , \ H_{Ij} = \partial X_I / \partial x_j \tag{12)-(14}$$

式(10),(11)を用いると、式(6)は次のように書き表せる。

$$K^a{}_i = \int_{B^e_o} S_{IJ} F_{iJ} N^a{}_{,I} dV \tag{15}$$

$$K^a{}_i = \int_{B^e{}_n} \sigma_{ij} N^a{}_{,j} dV \tag{16}$$

$B^e{}_n$は変形後の領域を意味している。式(15)、(16)がそれぞれ全ラグランジ定式化および更新ラグランジ定式化による表現である。

3．接線剛性行列

式(9)は非線形方程式であり、その解法には数値解析を必要とする。ここでは、ニュートン・ラプソン法を用いることとする。このため式(6)を変位に関して線形化する。構成則として超弾性(Hyperelastic)材料を仮定すると、第１種P-K応力の線形化表現が次のように得られる[3]。

$$\Delta T_{Ii} = A_{IiJj} \Delta u_{j,J} \tag{17}$$

ここに、A_{IiJj}は弾性テンソル(Elasticity Tensor)であり、単位質量当たりのひずみエネルギーψを用いると

$$A_{IiJj} = \rho_o \, \partial^2 \psi / \partial F_{iI} \, \partial F_{jJ} \tag{18}$$

と定義される。式(17)を用いれば式(6)の線形化式 がただちに得られ、要素接線剛性行列が求まる。

$$DK^{ab}{}_{ij} = \int_{B^e{}_o} A_{IiJj} N^a{}_{,I} N^b{}_{,J} dV \tag{19}$$

ところで式(10)を用いると

$$A_{IiJj} = \delta_{ij} S_{IJ} + C_{IKJL} F_{iK} F_{jL} \tag{20}$$

という関係が求められる。ここに

$$C_{IKJL} = \rho_o \, \partial^2 \psi / \partial E_{IK} \, \partial E_{JL} \tag{21}$$

であり、またE_{IJ}はグリーンのひずみテンソルである。これより

$$DK^{ab}{}_{ij} = \int_{B^e{}_o} (\delta_{ij} S_{IJ} + C_{IKJL} F_{iK} F_{jL}) N^a{}_{,I} N^b{}_{,J} dV \tag{22}$$

さらに、式(11)を用いれば、

$$DK^{ab}{}_{ij} = \int_{B^e{}_n} (\delta_{ij} \sigma_{kl} + c_{kilj}) N^a{}_{,k} N^b{}_{,l} dV \tag{23}$$

が得られる。ここに

$$c_{kilj} = J^{-1} C_{IKJL} F_{kI} F_{iK} F_{lJ} F_{jL} \tag{24}$$

式(22)、(23)がそれぞれ全ラグランジ定式化、更新ラグランジ定式化における要素接線剛性行列である。

式(22)または式(23)を用いれば、全領域での線形化有限要素方程式が次のように得られる。

$$[DK(U^{(m)})]\{\Delta U\} = \{R\} - \{K(U^{(m)})\} \tag{25}$$

ここに、mは繰り返し計算の回数であり、m+1回めの変位は

$$\{U^{(m+1)}\} = \{U^{(m)}\} + \{\Delta U\} \tag{26}$$

で与えられる。収束値が得られれば、それが式(9)、すなわち有限変位問題の解となる。

4．まとめ

積分変数の変換により、全ラグランジ定式化および更新ラグランジ定式化が可能であることを示した。定式化の過程より明らかなように、非線形釣合い方程式、接線剛性行列ともに、この２つの手法で得られるものは、数学的には等価である。従って両定式化の優劣の議論は、数値計算上での効率性の問題に限られることがわかる。

参考文献

1) 吉田裕、 研究展望：有限要素法による幾何学的非線形構造解析法の現状と課題、 土木学会論文集、第374号、pp.25-37、1986年10月。

2) Fung, Y.C., Foundations of Solid Mechanics, Prentice-Hall Inc., N.J., 1965.

3) Hughes, T.J.R., and Pister, K.S., Consistent Linearization in Mechanics of Solids and Structures, Comp. Struct., Vol.8, pp.391-397, 1978.